Четырнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

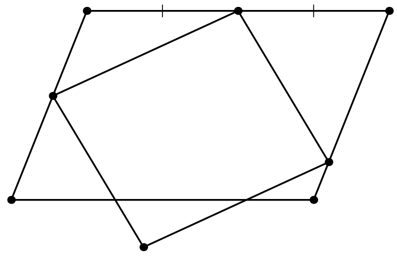
Шестнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 15 апреля 2018 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Фольклор*) Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что диагональ одного параллелограмма проходит через точку пересечения диагоналей другого.



Решение. Введем обозначения (см. рис. 8–9.1). Докажем, что отрезок KL проходит через O — точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Заметим, что O — середина отрезка BD, то есть KO — средняя линия треугольника CBD. Тогда достаточно доказать параллельность прямых KL и CD. Пусть Q — точка пересечения диагоналей параллелограмма $MKPL$. Тогда KQ — средняя линия трапеции $MBCP$, то есть параллельна ее основаниям. Следовательно, прямые KL и CD параллельны, что и требовалось.

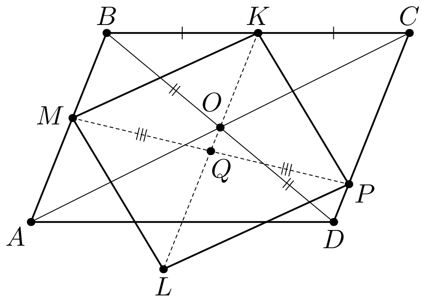


Рис. 8–9.1

Комментарий. Также можно было провести через точку L прямую, параллельную BC и, рассмотрев точки X и Y пересечения этой прямой с прямыми AB и CD соответственно, использовать, что $XBCY$ — параллелограмм и точка пересечения его диагоналей совпадает с точкой Q.

2. (*Ю. Блинков*) Биссектриса угла C и внешнего угла A трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке M, а биссектриса угла B и внешнего угла D — в точке N. Докажите, что середина отрезка MN равноудалена от прямых AB и CD.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — середина MN, x и y — расстояния от точек M и N соответственно до основания AD, h — высота трапеции (см. рис. 8–9.2а).

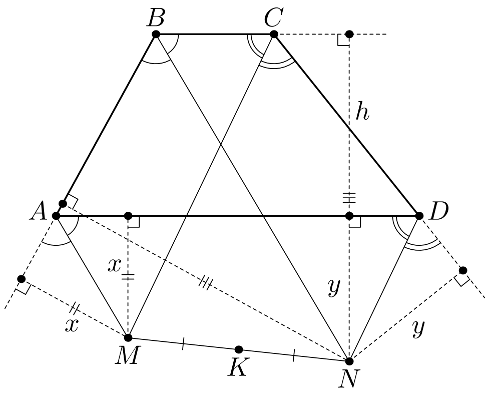


Рис. 8–9.2а

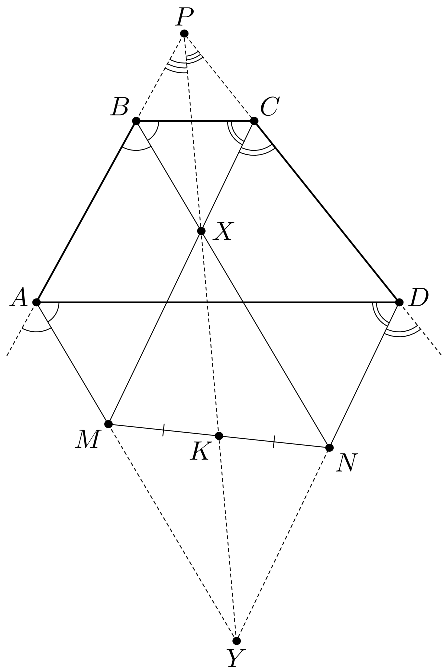


Рис. 8–9.2б

Заметим, что расстояния от точки K до прямых AB и CD равны полусуммам соответствующих расстояний от точек M и N.

Найдем расстояние от точки K до прямой AB. Поскольку точка M лежит на биссектрисе внешнего угла A, то она равноудалена от прямых AB и AD. Аналогично, точка N равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, искомое расстояние равно $0{,}5(x+y+h)$.

Рассуждая аналогично, расстояние от точки K до прямой CD также равно $0{,}5(x+y+h)$, что и требовалось.

При некотором расположении точек длины отрезков могут войти в сумму с противоположным знаком. Решение в этих случаях аналогично рассмотренному.

Второй способ. Пусть биссектрисы углов B и C пересекаются в точке X, биссектрисы внешних углов A и D — в точке Y, а прямые AB и CD — в точке P (см. рис. 8–9.2б).

Заметим, что биссектрисы угла C и внешнего угла D параллельны как биссектрисы соответственных углов при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. Аналогично, параллельны биссектрисы угла B и внешнего угла A. Следовательно, четырехугольник $MXNY$ — параллелограмм и середина отрезка MN лежит на прямой XY.

Докажем, что прямая XY содержит биссектрису угла APD. Действительно, точка X является центром вневписанной окружности треугольника BPC, так как лежит на пересечении биссектрис двух его внешних углов. Аналогично, точка Y — центр вневписанной окружности треугольника APD.

Таким образом, точки X и Y (а следовательно, и точка K) лежат на биссектрисе угла APD, откуда и следует искомая равноудаленность.

При некотором расположении вершин трапеции точки X и Y могут оказаться центрами вписанных окружностей. Решение в этих случаях аналогично рассмотренному.

Комментарий. Также можно рассмотреть точки Q и R — середины AB и CD соответственно. Тогда K — центр вневписанной окружности треугольника PQR.

3. (*Д. Прокопенко*) На продолжениях сторон CA и AB треугольника ABC за точки A и B соответственно отложены отрезки $AE = BC$ и $BF = AC$. Окружность касается отрезка BF в точке N, стороны BC и продолжения стороны AC за точку C. Точка M — середина отрезка EF. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла A.

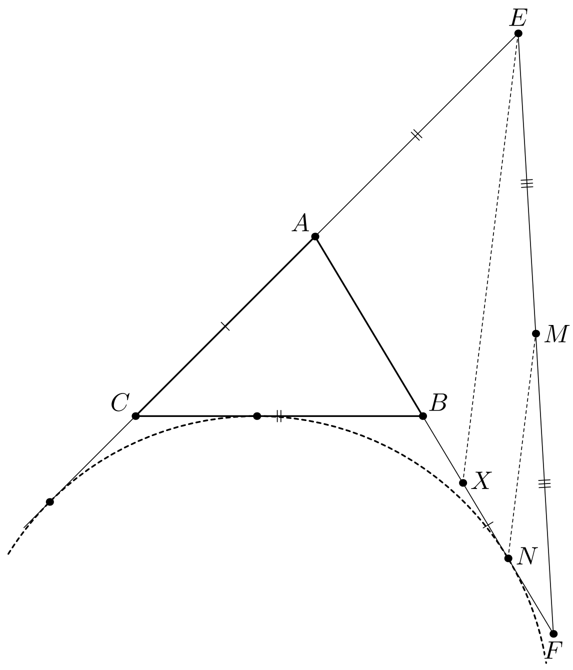


Рис. 8–9.3

Решение. Пусть прямая, проходящая через точку E и параллельная MN, пересекает прямую AB в точке X (см. рис. 8–9.3). Тогда достаточно доказать, что треугольник XAE — равнобедренный. Поскольку MN — средняя линия треугольника EFX, то $XF = 2NF$. Используя равенства $AE = BC$, $BF = AC$ и то, что длина отрезка AN равна полупериметру треугольника ABC, получим: $AX = AF - XF = AB + BF - 2NF = AB + AC - 2NF = AB + AC - 2(AB + BF - AN) = AB + AC - 2(AB + AC - AN) = BC = AE$. То есть треугольник XAE — равнобедренный и биссектриса его внешнего угла A параллельна основанию.

Комментарий. Также можно было продлить MN до пересечения с прямой AC и доказать равенство отрезков AN и AY, где Y — точка пересечения. Это можно сделать, например, используя теорему Менелая для треугольника EAF и прямой MN.

4. (*К. Кноп*) Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

Решение. Пусть W — середина дуги BC, не содержащей вершину A (см. рис. 8–9.4). Тогда $WC = WB$, как равные хорды, стягивающие равные дуги. Рассмотрим точку M на стороне AB такую, что $AM = AC$. Тогда треугольники ACW и AMW равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $WM = WC = WB$, то есть треугольник BWM — равнобедренный.

Пусть прямая WM пересекает описанную окружность в точке N. Используя равенство вписанных углов и равенство углов при основании равнобедренного треугольника, получим: $\angle ANM = \angle ANW = \angle ABW = \angle BMW = \angle AMN$.

Следовательно, треугольник AMN — также равнобедренный и $AN = AM = AC$.

Отсюда вытекает следующий способ построения:

1) Построим окружность с центром A и радиусом AC. Пусть она пересекает сторону AB в точке M, а описанную окружность — в точке N.

2) Построим прямую MN. Точка пересечения этой прямой с описанной окружностью треугольника — искомая.

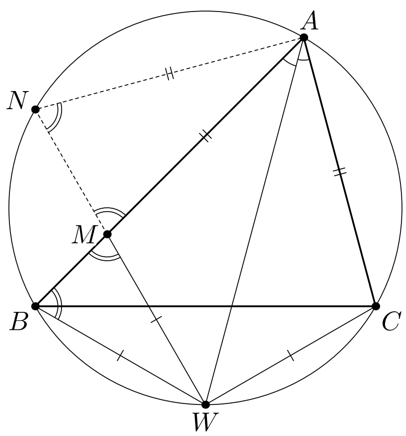


Рис. 8–9.4

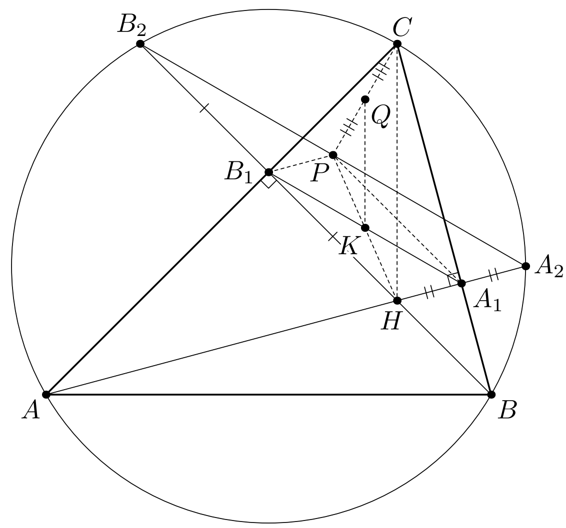


Рис. 8–9.5

5. (*Ю. Блинков*) Фиксированы окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC, и вершина C. Ортоцентр H движется по окружности с центром в точке C. Найдите ГМТ середин отрезков, соединяющих основания высот, проведенных из вершин A и B.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты, A_2 и B_2 — точки пересечения их продолжений с описанной окружностью, K — середина A_1B_1, P — середина A_2B_2, Q — середина CP (см. рис. 8–9.5).

Докажем, что искомым ГМТ является дуга окружности с центром в точке Q и радиусом $0{,}5CH$, ограниченная прямой A_2B_2 (точки пересечения не входят).

Сначала покажем, что все искомые точки лежат на фиксированной окружности.

Воспользуемся следующим фактом:

Точки, симметричные ортоцентру относительно прямых, содержащих стороны треугольника, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Заметим, что в силу симметрии $CB_2 = CH = CA_2$, то есть точки A_2 и B_2 — фиксированы. Следовательно, фиксирована и середина A_2B_2 — точка P, а значит и середина CP — точка Q.

Заметим, что B_1PA_1H — параллелограмм, то есть K — середина PH. Следовательно, $QK = 0{,}5CH$, то есть точка K лежит на окружности с центром в точке Q и радиусом $0{,}5CH$.

Теперь, поскольку все такие точки H лежат по одну сторону от хорды A_2B_2, то и точка

K (середина PH) при движении точки H остается в той же полуплоскости относительно A_2B_2.

Осталось доказать, что любая точка на указанной дуге может служить серединой отрезка A_1B_1. Действительно, поскольку K — середина PH, то по точке K мы однозначно восстанавливаем точку H и точки A_1 и B_1 как середины отрезков HA_2 и HB_2. Осталось заметить, что по построению треугольник A_1B_1C — остроугольный, то есть ABC также остроугольный.

Комментарии. 1) Точку Q также можно определить как середину отрезка LN, где L и N — середины отрезков CB_2 и CA_2 соотвественно. Это дает другое решение задачи: LNA_1B_1 — параллелограмм с фиксированной стороной LN, ее серединой Q и фиксированной длиной другой стороны. Тогда середина A_1B_1 удалена от Q на фиксированное расстояние.

2) Точка P — ортоцентр треугольника CA_1B_1, откуда можно получить еще один способ решения. В треугольнике CA_1B_1 фиксированы вершина, ортоцентр и радиус описанной окружности (равный $0{,}5CH$). Тогда середина противолежащей стороны удалена от середины CP на расстояние, равное радиусу.

3) Точки P и Q лежат на прямой CO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

4) Отрезок AB при данных условиях фиксирован (как и A_1B_1), а его середина движется по окружности с центром O.

6. (*Е. Бакаев*) Разрежьте каждый из равносторонних треугольников со сторонами 2 и 3 на три части и сложите из всех полученных частей равносторонний треугольник.

Решение. На рисунке 8-9.6а показано, как надо разрезать треугольники, а на рисунке 8–9.6б – как из них сложить большой треугольник. Отрезки, отмеченные на рисунках одной черточкой, двумя черточками и тремя черточками, равны половине, четверти и трем четвертям длины стороны единичного равностороннего треугольника.

Докажем, что длина отрезка DE равна четверти длины стороны единичного треугольника (доказательство для остальных отрезков аналогично) (см. рис. 8–9.6б). Действительно, $MN \parallel BC$ и $AN = NC$, следовательно, MN — средняя линия в треугольнике ABC и $MN = \frac{BC}{2}$. Аналогично, $DE \parallel MN$ и $AE = EN$, следовательно, DE — средняя линия в треугольнике AMN и $DE = \frac{MN}{2}$. Следовательно, $DE = \frac{BC}{4}$.

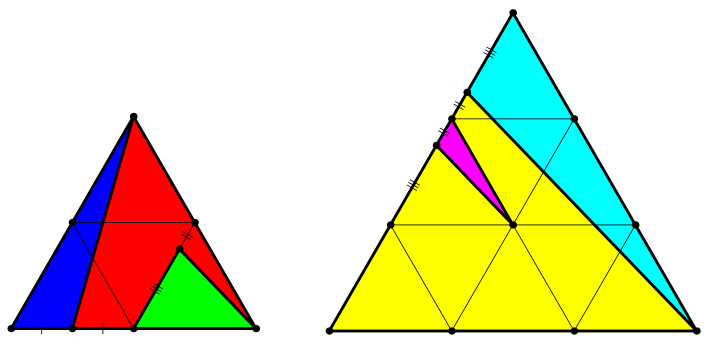


Рис. 8—9.6а

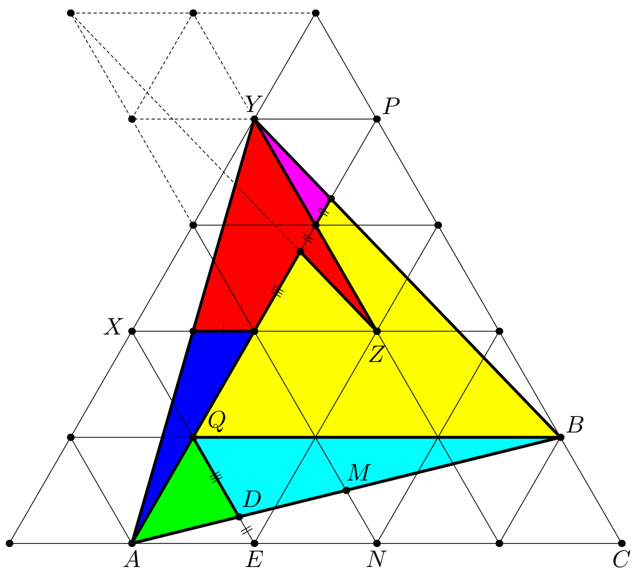


Рис. 8—9.6б

Комментарий. Путь к решению может быть примерно следующим. Поскольку площадь треугольника, который должен получиться, в 13 раз больше площади правильного треугольника со стороной 1, его сторона равна $\sqrt{13}$. Такой треугольник можно расположить на треугольной сетке, как показано на рисунке 8–9.6б. Расположим на той же сетке треугольники XYZ и PBQ со сторонами 2 и 3 так, чтобы у каждого из них одна вершина совпала с вершиной большого треугольника. Теперь отрежем и поместим внутрь большого треугольника выступающие части маленьких, и заметим, что из двух оставшихся незакрытыми кусков большого треугольника можно сложить треугольник со стороной 1, который является общей частью двух маленьких треугольников.

Материалы подготовили: Е. Бакаев, А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский.