Математика пәнінен 2020 жылғы Республикалық жасөспірімдер олимпиадасының қорытынды кезеңі.
8 сынып. Есептер шешімі

№1. n — натурал сан болсын. n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ сандарының арасында ең көп дегенде неше жай сан бола алады?

Жауабы: Үш сан. Жауаптағы мысалды $n=6$ болғанда алсақ болады.

Шешуі. Барлық төрт сан бір уақытта жай бола алмайтынын көрсетейік. Олай болмасын. Қандай да бір натурал n үшін барлық n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ сандары жай болсын. n санын 3-ке бөлгенде 0, 2 немесе 1 қалдық қалуы мүмкін. Демек n саны $3k$, $3k-1$ немесе $3k-2$ түріндегі сан, бұл жерде k — натурал сан. Әр жағдайды жеке қарастырайық.

a) $n=3k$. Бұл жағдайда n саны 3-ке бөлінеді.

b) $n=3k-2$. Бұл жағдайда $4n+17=4(3k-2)+17=3(4k+3)$ саны 3-ке бөлінеді.

c) $n=3k-1$. Бұл жағдайда $7n+1=7(3k-1)+1=3(7k-2)$ саны 3-ке бөлінеді.

Демек, үш жағдайда да n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ сандарының бірі 3-ке бөлінеді. Тұжырым бойынша барлық төрт сан жай және $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ сандары 3-тен үлкен, сондықтан $n=3$. Бірақ $n=3$ болғанда $7n+1=22$ құрама сан. Қарама-қайшылық.

№2. Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $(AC=BC)$ M нүктесі — AB табанының ортасы. M нүктесі AC және KL түзулерінен тең қашықтықта болатындай, AC және BC қабырғаларынан сәйкесінше K және L нүктелері алынған. $AK+BL\geqslant AB$ екенін дәлелдеңіз.

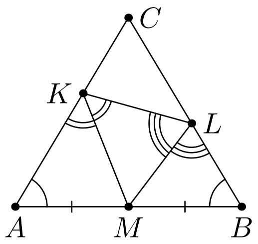

Рис. 1

Шешуі. ABC теңбүйірлі болғандықтан M нүктесі AC және BC түзулерінен бірдей қашықтықта орналасқан. Сондықтан биссектрисаның кері теоремасы бойынша M нүктесі AKL және KLB бұрыштарының биссектрисаларында жатыр. $\angle CAB=\angle CBA=\alpha$, $\angle AKM=\angle LKM=\beta$, $\angle KLM=\angle BLM=\gamma$ деп белгілейік. $AKLB$ төртбұрышының ішкі бұрыштар қосындысын қарастырып, $2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ$ немесе $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ теңдігін аламыз. Бірақ AKM үшбұрышының екі бұрышы α және β-ға тең. Сондықтан $\angle AMK=\gamma$. Дәл сол сияқты $\angle BML=\beta$. Демек, $\triangle AKM\sim\triangle BML$. Осы ұқсастықтан келесі теңдіктерді аламыз:

$$\frac{AK}{AM}=\frac{BM}{BL}\Rightarrow AK\cdot BL=AM\cdot BM=\frac{AB^2}{4}. \qquad (1)$$

Сонда $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a,b\geqslant 0)$ теңсіздігінен және (1) теңдігінен, $AK+BL\geqslant 2\sqrt{AK\cdot BL}=AB$ екені шығады.

№3. Математикадан олимпиадаға қатысқан оқушыларға 4 есеп берілді. Әрбір есеп 0-ден 10-ға дейінгі бүтін сан болатын ұпаймен бағаланды. Олимпиаданың қорытындысын шығарғаннан кейін, кез келген екі қатысушы бірдей ұпай санын жинамағаны және ең көп ұпай жинаған төрт қатысушының ұпайларының қосындысы барлық қатысушының ұпайларының қосындысының дәл $1/4$ бөлігін құрағаны белгілі болды. Олимпиадаға қатысқан оқушылардың ең үлкен мүмкін санын табыңыз.

Жауабы: 34. **Мысал.** Қатысушылар саны 34 және олардың жинаған ұпай сандары сәйкесінше 38, 37, 36, 34, 29, 28, 27, ..., 1, 0 болсын. Сонда алдыңғы төрт қатысушылардың ұпай қосындысы 145, ал барлық қатысушылар ұпай саны 580-ге тең болады. 580 саны 145 санынан 4 есе үлкен.

Шешуі. Олимпиадаға n оқушы қатыссын және олар сәйкесінше $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ұпай жинасын. Жалпылықты сақтай отырып

$$40\geqslant a_1>a_2>\ldots>a_n\geqslant 0$$

деп алайық. $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ болсын. Есеп шарты бойынша $S=4(a_1+a_2+a_3+a_4)$. Ал $a_1\leqslant 40$ болғандықтан, $a_2\leqslant 39$, $a_3\leqslant 38$ және $a_4\leqslant 37$, яғни

$$S\leqslant 4(40+39+38+37)=616. \qquad (1)$$

Басқа жағынан $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 1$, ..., $a_n\geqslant n-1$. Демек

$$S\geqslant 0+1+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}. \qquad (2)$$

(1) және (2) теңіздіктерінен $616\geqslant\frac{(n-1)n}{2}$ екені шығады. Егер $n\geqslant 36$ болса, онда $\frac{(n-1)n}{2}\geqslant\frac{35\cdot 36}{2}=630>616$, ал ол дұрыс емес теңсіздік. Демек, $n\leqslant 35$.

$n=35$ болсын. Бұл жағдайда

$$\frac{3S}{4}=S-\frac{S}{4}=a_{35}+a_{34}+\ldots+a_5\geqslant 0+1+\ldots+30=\frac{30\cdot 31}{2}=465,$$

осыдан $S\geqslant 465\cdot 4/3=620$. Демек, $a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{S}{4}\geqslant\frac{620}{4}=155$, бұл да дұрыс емес, өйткені $a_1+a_2+a_3+a_4\leqslant 40+39+38+37=154$. Қарама-қайшылық. Демек, $n\leqslant 34$.

Заключительный этап Республиканской юниорской олимпиады по математике 2020 года.
8 класс. Решения задач

№1. Пусть n — натуральное число. Какое наибольшее количество чисел среди n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ могут быть простыми?

Ответ: Три числа. Пример для ответа можно получить при $n=6$.

Решение. Докажем, что все числа одновременно не могут быть простыми. От противного, пусть для некоторого натурального n все числа n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ являются простыми. При делении на 3 число n может давать остатки 0, 2 или 1, то есть может иметь вид $3k$, $3k-1$ или $3k-2$, где k — натуральное число. Рассмотрим каждый случай по отдельности.

a) $n=3k$. Тогда n делится на 3.

b) $n=3k-2$. Тогда $4n+17=4(3k-2)+17=3(4k+3)$ делится на 3.

c) $n=3k-1$. Тогда $7n+1=7(3k-1)+1=3(7k-2)$ делится на 3.

Значит, в любом случае один из чисел n, $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ делится на 3. По предположению все эти числа простые и все числа $4n+17$, $7n+1$, $9n+7$ больше чем 3, поэтому $n=3$. Тогда $7n+1=22$ составное число, противоречие.

№2. Точка M — середина основания AB равнобедренного треугольника ABC ($AC=BC$). На сторонах AC и BC выбраны точки K и L соответственно так, что точка M равноудалена от прямых AC и KL. Докажите, что $AK+BL\geqslant AB$.

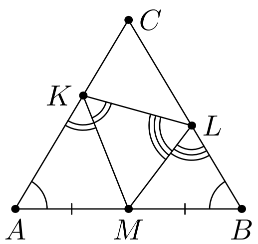

Рис. 2

Решение. Из равнобедренности ABC понятно, что точка M равноудалена от прямых AC и BC. Поэтому из обратной теоремы о биссектрисе угла следует, что M лежит на биссектрисе углов AKL и KLB. Обозначим $\angle CAB=\angle CBA=\alpha$, $\angle AKM=\angle LKM=\beta$, $\angle KLM=\angle BLM=\gamma$. Тогда рассмотрев сумму внутренних углов четырехугольника $AKLB$, получим $2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ$ или $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. Но треугольник AKM уже имеет углы α и β. Поэтому $\angle AMK=\gamma$. Аналогично, $\angle BML=\beta$. Следовательно, $\triangle AKM\sim\triangle BML$. Из этого подобия получим

$$\frac{AK}{AM}=\frac{BM}{BL}\Rightarrow AK\cdot BL=AM\cdot BM=\frac{AB^2}{4}. \qquad (1)$$

Тогда из неравенства $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a,b\geqslant 0)$ и равенства (1) следует, что $AK+BL\geqslant 2\sqrt{AK\cdot BL}=AB$. Что и требовалось доказать.

№3. На олимпиаде школьников по математике участникам было предложено 4 задач, каждая из которых оценивалось целым числом баллов от 0 до 10. После подведения итогов олимпиады, оказалось, что никакие два участника не показали одинаковый результат, и сумма баллов четырех участников, набравших наибольшее количество баллов, составляет ровно $1/4$ часть от общего числа баллов, набранных всеми участниками вместе. Найдите наибольшее возможное количество участников олимпиады.

Ответ: 34. **Пример.** Пусть участников 34 и их суммарные баллы соответственно равны 38, 37, 36, 34, 29, 28, 27, …, 1, 0 баллам. Тогда сумма баллов первых четырех участников равна 145, а сумма всех — равна 580, что в 4 раза больше 145.

Решение. Пусть n — количество участников олимпиады и они набрали $a_1, a_2, \ldots, a_n$ баллов. Без потери общности положим

$$40\geqslant a_1>a_2>\ldots>a_n\geqslant 0.$$

Пусть $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$. По условию $S=4(a_1+a_2+a_3+a_4)$. Так как $a_1\leqslant 40$, то $a_2\leqslant 39$, $a_3\leqslant 38$ и $a_4\leqslant 37$, следовательно

$$S\leqslant 4(40+39+38+37)=616. \qquad (1)$$

С другой стороны $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 1$, …, $a_n\geqslant n-1$. Значит,

$$S\geqslant 0+1+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим неравенство $616\geqslant\frac{(n-1)n}{2}$. Если $n\geqslant 36$, то $\frac{(n-1)n}{2}\geqslant\frac{35\cdot 36}{2}=630>616$, что неверно. Значит, $n\leqslant 35$.

Предположим, что $n=35$. В этом случае

$$\frac{3S}{4}=S-\frac{S}{4}=a_{35}+a_{34}+\ldots+a_5\geqslant 0+1+\ldots+30=\frac{30\cdot 31}{2}=465,$$

откуда $S\geqslant 465\cdot 4/3=620$. Следовательно

$$a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{S}{4}\geqslant\frac{620}{4}=155,$$

что неверно, так как $a_1+a_2+a_3+a_4\leqslant 40+39+38+37=154$, противоречие. Значит, $n\leqslant 34$.

Математика пәнінен 2020 жылғы Республикалық жасөспірімдер олимпиадасының қорытынды кезеңі.
9 сынып. Есептер шешімі

№1. $ABCD$ дөңес төртбұрышында $CD - AB = BC$ теңдігі орындалады. B бұрышының сыртқы биссектрисасы мен C бұрышының ішкі биссектрисасы M нүктесінде қиылысады. $MA = MD$ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. CB сәулесінде B арғы нүктеден $AB = BK$ болатындай K нүктесін белгілейік. Сонда $\triangle ABK$ теңбүйірлі және $CD = AB + BC = BK + BC = KC$ болғандықтан, $\triangle CDK$ да теңбүйірлі болады. Демек, BM және CM түзулері сәйкесінше AK және KD кесінділерінің орта перпендикулярлары болады. Сондықтан M — $\triangle AKD$-ға сырттай сызылған шеңбер центрі болып табылады. Осыдан $MA = MD$ теңдігі шығады.

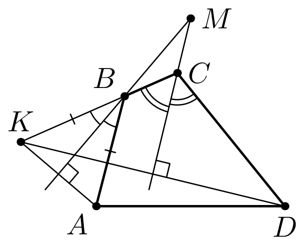

Рис. 3

№2. Теңдеулер жүйесін нақты сандар жиынында шешіңіз:

$$\begin{cases} a^3 - 12b^2 + 48b - 64 = 0, \\ b^3 - 12c^2 + 48c - 64 = 0, \\ c^3 - 12a^2 + 48a - 64 = 0. \end{cases}$$

Жауабы: $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Шешуі. Жүйенің үш теңдеуін бағанмен қосып,

$$(a-4)^3 + (b-4)^3 + (c-4)^3 = 0 \qquad (1)$$

теңдігін аламыз. Бірінші теңдеуден $a^3 = 12b^2 - 48b + 64 = 12(b-2)^2 + 16 > 0$ екені шығады, яғни $a > 0$. Дәл сол сияқты $b > 0$ және $c > 0$. Бірінші теңдеуді $a^3 - 64 = 12b^2 - 48b$ түрінде қайта жазайық. Сонда

$$(a-4)\left(a^2 + 4a + 16\right) = 12b\,(b-4)\,. \qquad (2)$$

$b > 0$ және $a^2 + 4a + 16 = (a+2)^2 + 12 > 0$ болғандықтан, (2)-ші теңдіктен $a - 4$ және $b - 4$ сандарының бірдей таңбалы екені шығады. Дәл сол сияқты екінші және үшінші теңдеулерді қарастырып, барлық $a-4$, $b-4$, $c-4$ сандары бірдей таңбалы екенін аламыз. Яғни, (1)-ші теңдеуден $a-4 = b-4 = c-4 = 0$ теңдіктерін немесе $(a, b, c) = (4, 4, 4)$ үштігін аламыз. Осы тапқан сандар үштігі есеп шартын қанағаттандыратынына көз жеткізу қиын емес.

№3. $n \geqslant 1$ бүтін саны мен $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ жиыны берілген. S жиынының бос емес ішкі T жиыны үшін $f(T)$ арқылы $f(T) = \dfrac{1}{n+m-M}$ санын белгілейік, бұл жерде m және M сандары T-ның сәйкесінше ең кіші және ең үлкен элементтері. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ арқылы S жиынының барлық бос емес ішкі жиындарын белгілейік. $f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_k)$ қосындысын табыңыз.

Жауабы: 2^{n-1}.

Шешуі. $1 \leqslant m \leqslant M \leqslant n$ болғандықтан, $M - m$ азайтындысының мәндер жиыны $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ жиынына тең болады. $M - m = k$ саны үшін S-тің ішкі бос емес T жиындарының барлық $f(T)$ қосындыларын $g(k)$ арқылы белгілейік. Егер барлық $k = 0, 1, \ldots, n-1$ үшін $g(k)$ сандарын тауып, $g(0) + g(1) + \ldots + g(n-1)$ қосындысын тапсақ, есеп шартындағы қосынды осы қосындыға тең болады.

Барлық $k = 0, 1, \ldots, n-1$ үшін $g(k)$ сандарын табайық.

a) $k = 0$. Сонда $M = m$, демек T — бір элементті ішкі жиындар (олардың саны n-ге тең) және $f(T) = \frac{1}{n}$. Демек $g(0) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$.

b) $k > 0$. Бұл жағдайда $f(T) = \dfrac{1}{n-k}$. Сонда $M - m = k$ болатын тұрақты M және m сандары үшін $T = \{m, M\} \cup V$ бірігуін аламыз, бұл жерде V жиынының барлық элементтері $m+1$ және $M-1$ сандарының арасына тиісті. V жиынын таңдап алу әдіс саны $2^{M-m-1} = 2^{k-1}$ санына тең, өйткені әр $m+1$, $m+2$, …, $M-1$ сандарын біз V жиынына кіргізіп те, кіргізбей де қоя аламыз (әр таңдау әдісі екіге тең, ал сандар саны $M-m-1$). Яғни осы жағдайдағы тұрақты M және m сандары үшін біздің қосынды $s = \dfrac{2^{k-1}}{n-k}$ санына тең болады. Ал $M - m = k$ айырмасы орындалатындай M және m жұптарын таңдау әдісі $(n-k)$-ға тең (ол келесі (M, m) жұптары: $(k+1, 1)\,, (k+2, 2)\,, \ldots, (n, n-k)$). Сондықтан $g\,(k) = (n-k)\,s = 2^{k-1}$.

Демек, есептегі іздеп отырған қосынды $g\,(0) + g\,(1) + \ldots + g\,(n-1) = 1 + 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1}$ санына тең. (Соңғы теңдікті индукция әдісімен оңай дәлелдеуге болады.)

Заключительный этап Республиканской юниорской олимпиады по математике 2020 года.
9 класс. Решения задач

№1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $CD - AB = BC$. Внешняя биссектриса угла B и внутренняя биссектриса угла C пересекаются в точке M. Докажите, что $MA = MD$.

Решение. На луче CB за точку B отметим точку K такую, что $AB = BK$. Тогда $\triangle ABK$ равнобедренный и $CD = AB + BC = BK + BC = KC$, то есть $\triangle CDK$ также равнобедренный. Следовательно, прямые BM и CM являются серединными перпендикулярами отрезков AK и KD соответственно. Поэтому M — центр описанной окружности $\triangle AKD$, откуда и следует равенство $MA = MD$.

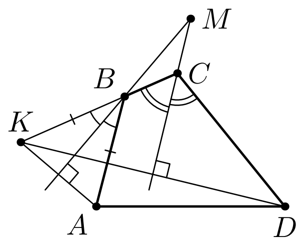

Рис. 4

№2. Решите систему уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} a^3 - 12b^2 + 48b - 64 = 0, \\ b^3 - 12c^2 + 48c - 64 = 0, \\ c^3 - 12a^2 + 48a - 64 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Решение. Просуммировав три уравнения системы, получим

$$(a-4)^3 + (b-4)^3 + (c-4)^3 = 0. \qquad (1)$$

Из первого уравнения следует, что $a^3 = 12b^2 - 48b + 64 = 12(b-2)^2 + 16 > 0$, то есть $a > 0$. Аналогично $b > 0$ и $c > 0$. Перепишем первое уравнение в виде $a^3 - 64 = 12b^2 - 48b$, тогда

$$(a-4)\left(a^2 + 4a + 16\right) = 12b\,(b-4). \qquad (2)$$

Так как $b > 0$ и $a^2 + 4a + 16 = (a+2)^2 + 12 > 0$, то из (2) следует, что числа $a - 4$ и $b - 4$ одного знака. Аналогично рассмотрев второе и третье уравнения, получим что все числа $a - 4$, $b - 4$, $c - 4$ одного знака. Тогда из (1) следует, что $a - 4 = b - 4 = c - 4 = 0$, то есть $(a, b, c) = (4, 4, 4)$. Легко проверить, что найденные числа удовлетворяют условию задачи.

№3. Дано целое число $n \geqslant 1$ и множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для непустого подмножества T множества S, определим $f(T) = \dfrac{1}{n + m - M}$, где m и M соответственно наименьший и наибольший элементы T. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — все непустые подмножества множества S. Найдите сумму $f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_k)$.

Ответ: 2^{n-1}.

Решение. Так как $1 \leqslant m \leqslant M \leqslant n$, то $M - m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Пусть для каждого $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $g(k)$ — сумма всех $f(T)$, где T непустое подмножество S, и для T выполнено равенство $M - m = k$. Тогда искомая сумма равна $g(0) + g(1) + \ldots + g(n-1)$.

Найдем $g(k)$ для каждого $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

a) $k = 0$. Тогда $M = m$, следовательно T — одноэлементное подмножество (таких n штук) и $f(T) = \frac{1}{n}$. Тогда $g(0) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$.

b) $k > 0$. В этом случае $f(T) = \dfrac{1}{n-k}$. Тогда для фиксированных M и m, таких, что $M - m = k$ имеем, что $T = \{m, M\} \cup V$, где все элементы множества V находится между $m + 1$ и $M - 1$. Число способов выбрать множество V равно $2^{M-m-1} = 2^{k-1}$, так как каждое число $m + 1$, $m + 2$, $\ldots$, $M - 1$ либо берем в множество или не берем (два варианта выбора каждого числа, а чисел $M - m - 1$). Значит, для фиксированных M и m из этого случая, наша сумма будет равна $s = \dfrac{2^{k-1}}{n-k}$. Заметим, что количество выборов M и m так, чтобы $M - m = k$ равна $n - k$ (это пары (M, m): $(k+1, 1)$, $(k+2, 2)$, $\ldots$, $(n, n-k)$), следовательно $g(k) = (n-k)\,s = 2^{k-1}$.

Следовательно, искомая сумма в задаче, равна сумме

$$g(0) + g(1) + \ldots + g(n-1) = 1 + 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

(Последнее равенство легко доказывается через индукцию.)