Материалы для проведения Заключительного этапа Республиканской олимпиады по математике 2017-2018 учебного года.

Научно практический центр «Дарын»
г. Атырау, март 2018 года.

Составители:
Голованов Александр Сергеевич
Елиусизов Дамир Аскарович
Кунгожин Медеубек Аманкельдиевич
Сатылханов Канат Кайратулы

Условия задач Республиканской олимпиады по математике

Условия задач 9 класса

Задача № 1. Дан параллелограмм $ABCD$. Некоторая окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки BD и AC во второй раз соответственно в точках X и Y, а описанная окружность треугольника ADX пересекает отрезок AC во второй раз в точке Z. Докажите, что отрезки AY и CZ равны.

Задача № 2. Известно, что a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{(a+b+c)(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)} \geqslant \frac{9(3a-5b+3c)}{3a+5b-3c}.$$

Задача № 3. *Дополненная десятичная запись* натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018\,2018\,2018\ldots2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)?

Задача № 4. Можно ли разрезать прямоугольник размером 2018×2019 на фигурки вида уголка из 5 клеток (фигура, полученная вырезанием квадрата 2×2 из квадрата 3×3) и квадратика 2×2 (фигурки можно поворачивать и переворачивать)?

Задача № 5. Решите в целых числах уравнение $2^a + a^2 = 4^b + b^2$.

Задача № 6. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что $BM = BC$. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K, а прямые DK и BC — в точке L. Докажите, что углы BML и DAM равны.

Условия задач 10 класса

Задача № 1. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K. На прямой AD отмечены точки L и M так, что A лежит на отрезке LD, D лежит на отрезке AM, $AL = AK$ и $DM = DK$. Докажите, что прямые CL и BM пересекаются на биссектрисе угла BKC.

Задача № 2. *Дополненная десятичная запись* натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018\,2018\,2018\ldots2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)?

Задача № 3. Пусть $\mathbb{R}^+$ — множество положительных действительных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что

$$f\left(3f(xy)^2 + (xy)^2\right) = \left(xf(y) + yf(x)\right)^2$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Задача № 4. Даны натуральные числа a, b, c и d такие, что числа a и b взаимно просты и $a > b$. Известно, что число c^2 делится на $a^2 + b$, а число d^2 делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $cd > 2a^2$.

Задача № 5. Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c \in (0, 1)$ выполняется неравенство
$$\left(\sqrt{2}a - bc\right)\left(\sqrt{2}b - ca\right)\left(\sqrt{2}c - ab\right) \leqslant \frac{1}{8}\,.$$

Задача № 6. Диагонали вписанного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть ℓ — прямая, делящая угол AOB пополам. Обозначим через (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) невырожденный треугольник, образованный прямыми ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Пусть $\Delta_1 = (\ell, AB, CD)$ и $\Delta_2 = (\ell, AD, BC)$. Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются друг друга.

Условия задач 11 класса

Задача № 1. В равнобокой трапеции $ABCD$ точка O — середина основания AD. Окружность с центром в точке O и радиусом BO касается прямой AB. Пусть отрезок AC пересекает эту окружность в точке K ($C \neq K$), и пусть M такая точка, что $ABCM$ — параллелограмм. Описанная окружность треугольника CMD пересекает отрезок AC в точке L ($L \neq C$). Докажите, что $AK = CL$.

Задача № 2. Дано натуральное число $m \geqslant 2$. Последовательность натуральных чисел $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ назовем *вогнутой*, если $b_k + b_{k-2} \leqslant 2b_{k-1}$ для всех $2 \leqslant k \leqslant m$. Докажите, что существует не более 2^m вогнутых последовательностей, начинающихся с $b_0 = 1$ и $b_1 = 2$.

Задача № 3. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Существует ли функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любых натуральных m и n выполнено равенство
$$f\left(mf\left(n\right)\right) = f\left(m\right) f\left(m + n\right) + n?$$

Задача № 4. Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c, d \in (0, 1)$ выполняется неравенство
$$(ab - cd)(ac + bd)(ad - bc) + \min(a, b, c, d) < 1.$$

Задача № 5. Дано множество $S = \{xy\,(x + y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Пусть a и n натуральные числа такие, что $a + 2^k \in S$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Найдите наибольшее возможное значение n.

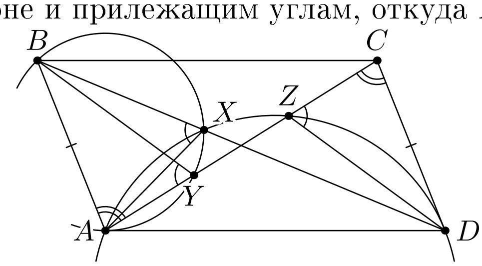
Задача № 6. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle AMB = \angle ADM + \angle BCM$ и $\angle AMD = \angle ABM + \angle DCM$. Докажите, что
$$AM \cdot CM + BM \cdot DM \geqslant \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}.$$

Решения задач Республиканской олимпиады по математике

Решения задач 9 класса

Задача № 1. (Кунгожин М.) Дан параллелограмм $ABCD$. Некоторая окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки BD и AC во второй раз соответственно в точках X и Y, а описанная окружность треугольника ADX пересекает отрезок AC во второй раз в точке Z. Докажите, что отрезки AY и CZ равны.

Решение. Из того, что точки A, X, Z и D лежат на одной окружности, а A, B, X и Y на другой, следует, что $\angle AYB = \angle AXB = 180° - \angle AXD = 180° - \angle AZD = \angle DZC$. Так как отрезки AB и CD равны и параллельны, то $\angle BAY = \angle DCZ$. Следовательно, треугольники ABY и CDZ равны по стороне и прилежащим углам, откуда $AY = CZ$.



Задача № 2. (Кабак М.) Известно, что a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{(a+b+c)\,(c+a-b)}{(a+b-c)\,(b+c-a)} \geqslant \frac{9(3a-5b+3c)}{3a+5b-3c}\,.$$

Решение. Пусть вписанная окружность делит стороны a, b и c на отрезки x, y и z так, что $a = x+y$, $b = y+z$, и $c = z+x$. Заменив a, b, c в неравенстве, получим эквивалентное ему неравенство:

$$\frac{x(x+y+z)}{yz} \geqslant \frac{9(3x-y-z)}{4y+z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+y+z)(4y+z) \geqslant 9yz(3x-y-z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2y + x^2z + 4y^2x + z^2x + 9y^2z + 9z^2y + 5xyz \geqslant 27xyz.$$

Последнее неравенство можно получить, сложив три неравенства Коши: $4x^2y + 9z^2y \geqslant 12xyz$, $x^2z + 9y^2z \geqslant 6xyz$ и $4y^2x + z^2x \geqslant 4xyz$. Равенство достигается, когда $x : y : z = 3 : 1 : 2$ или $a : b : c = 4 : 3 : 5$.

Задача № 3. (Голованов А.) *Дополненная десятичная запись* натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018\,2018\,2018\ldots2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)?

Ответ: 2^{100}.

Решение. Пусть в дополненной десятичной записи числа $N = \sum k = 0^m a_k \cdot 10^k$ слагаемое 10^k встречается 10 раз (то есть $a_k = 10$. Тогда остаток от деления N на 10^{k+1} не может быть больше, чем $\sum i = 0^{k-1} 10 \cdot 10^i = \sum i = 1^k 10^i = 111\ldots1110$ (в последнем случае имеется в виду обычная десятичная запись, и в ней k единиц).

У числа $N = 20182018\ldots2018 = \sum\limits_{j=1}^{100}(2\cdot10^{4j-1}+10^{4j-3}+8\cdot10^{4j-4})$ остаток от деления на 10^{4j} при $1 \leqslant j \leqslant 100$ равен $2018\ldots2018 > 2\cdot10^{4j-1}$, на 10^{4j-2} равен $182018\ldots2018 > 111\ldots1110$, на 10^{4j-3} равен $82018\ldots2018 \geqslant 8\cdot10^{4j-4}$. Поэтому a_k может быть равно 10 только при $k = 4j-2$, $1 \leqslant j \leqslant 100$.

С другой стороны, a_k может быть равно 10 для любого набора k такого вида (поскольку слагаемое $2\cdot10^{4j-1}+10^{4j-3}+8\cdot10^{4j-4}$ можно заменить на $1\cdot10^{4j-1}+10\cdot10^{4j-2}+10^{4j-3}+8\cdot10^{4j-4}$).

Выбрать такой набор можно 2^{100} способами.

Задача № 4. (Голованов А.) Можно ли разрезать прямоугольник размером 2018×2019 на фигурки вида уголка из 5 клеток (фигура, полученная вырезанием квадрата 2×2 из квадрата 3×3) и квадратика 2×2 (фигурки можно поворачивать и переворачивать)?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим столбцы из 2018 клеток поочерёдно в чёрный и белый цвета (так, чтобы первый и последний столбцы оказались чёрными). При этом, очевидно, в каждом квадрате 2×2 чёрных и белых клеток будет поровну, а в уголке из 5 клеток количества чёрных и белых клеток будут отличаться на 3. Если весь прямоугольник удастся разрезать на фигурки этих двух видов, разность количеств чёрных и белых клеток во всём прямоугольнике будет кратна 3. Но эта разность равна 2018 – противоречие.

Задача № 5. (Голованов А.) Решите в целых числах уравнение $2^a + a^2 = 4^b + b^2$.

Ответ: $a = b = 0$.

Первое решение. Левая часть не будет целой тогда и только тогда, когда $a < 0$, а правая – когда $b < 0$. При этом, если $a < 0$ и $b < 0$, то левая часть представляет собой несократимую дробь со знаменателем 2^{-a}, а правая – несократимую дробь со знаменателем 2^{-2b}, откуда $a = 2b$; но тогда $a = b = 0$, а мы предположили, что a и b отрицательны.

Если одно из чисел a и b равно 0, другое тоже равно 0.

Осталось разобрать случай, когда a и b натуральны. Поскольку $2^{2b} + (2b)^2 > 4^b + b^2$, число a меньше $2b$ и, следовательно, $a \leqslant 2b - 1$. Поскольку левая часть возрастает с ростом a, $2^{2b-1} + (2b-1)^2 \geqslant 4^b + b^2$, откуда $2^{2b-1} \leqslant 3b^2 - 4b + 1$. Убедимся, что последнее неравенство не имеет места ни при каких натуральных b. Действительно, пусть

$$c_n = 2^{2n-1} - 3n^2 + 4n - 1,$$

$$d_n = c_{n+1} - c_n = 3 \cdot 2^{2n-1} - 6n + 1,$$

$$e_n = d_{n+1} - d_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 6.$$

Очевидно, e_n положительно при всех натуральных n, то есть d_n возрастает. Но $d_1 = 1$, поэтому d_n также положительно при всех натуральных n, и c_n возрастает. Наконец, $c_1 = 2$, следовательно, c_n положительно при всех натуральных n.

Второе решение. Заметим, что если $a = 0$, то $b = 0$. Аналогично, если $b = 0$, то $a = 0$. Теперь будем считать, что $a > 0$ и $b > 0$.

Если $a \leqslant b$, то $2^a + a^2 \leqslant 2^b + b^2 < 4^b + b^2$. Значит, $a > b$. Следовательно, $4^b > 2^a$ или $2b > a$.

Из условия следует, что $0 < a^2 - b^2 = 4^b - 2^a \vdots 2^a$, следовательно,

$$a^2 > 2^a. \tag{1}$$

Индукцией по n докажем, что $2^n \geqslant n^2$ для любого натурального $n \geqslant 4$.

База: $2^4 \geqslant 4^2$.

Предположим, что утверждение верно для всех чисел, не больших k. Тогда

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2k^2 \geqslant k^2 + 4k > (k+1)^2,$$

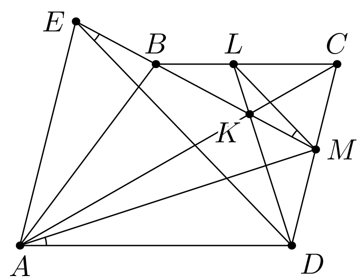
переход доказан.

Значит, неравенство (1) неверно при $a \geqslant 4$. Непосредственно проверяется, что оно неверно и при $a = 1, 2$. Тогда $a = 3$, то есть $4^b + b^2 = 17$, что невозможно при натуральном b.

Задача № 6. (Кунгожин М.) На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что $BM = BC$. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K, а прямые DK и BC — в точке L. Докажите, что углы BML и DAM равны.

Решение. В решении будем пользоваться тем фактом, что если диагонали четырехугольника $XYZT$ пересекаются в точке O, то $XY \parallel ZT$ тогда, и только тогда, когда $XO/OZ = YO/OT$.

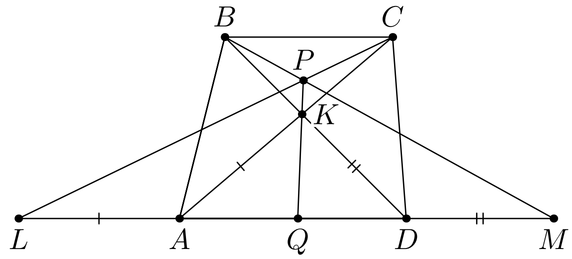
Пусть прямая, проходящая через A и параллельная CD, пересекает прямую BM в точке E. Тогда, $\angle AEM = \angle EMC = \angle MCB = 180^\circ - \angle ADC = \angle DAE$. Значит, $AEMD$ — равнобокая трапеция, то есть $\angle DAM = \angle DEM$. Также имеем: $EK/KM = AK/KC = DK/DL$. Следовательно, $ED \parallel LM$, откуда $\angle DEM = \angle BML$.



Решения задач 10 класса

Задача № 1. (Кунгожин М.) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K. На прямой AD отмечены точки L и M так, что A лежит на отрезке LD, D лежит на отрезке AM, $AL = AK$ и $DM = DK$. Докажите, что прямые CL и BM пересекаются на биссектрисе угла BKC.

Решение. Пусть прямые CL и BM пересекаются в точке P, а прямые PK и AD — в точке Q. Достаточно доказать, что PQ — биссектриса угла AKD или $AQ/AK = DQ/DK$.



Применим теорему Менелая для треугольников ALC и DMB и общей секущей PQ. Имеем:

$$\frac{LQ}{QA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PL} = 1 = \frac{MQ}{QD} \cdot \frac{DK}{KB} \cdot \frac{BP}{PM}\,. \qquad (1)$$

Заметим, что из $BC \parallel LM$ следует, что $\frac{AK}{KC} = \frac{DK}{KB}$ и $\frac{CP}{PL} = \frac{BP}{PM}$. Тогда из (1) следует $\frac{LQ}{QA} = \frac{MQ}{QD}$, что эквивалентно равенствам $\frac{AQ}{AL} = \frac{DQ}{DM} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AK} = \frac{DQ}{DK}$. Что и требовалось доказать.

Задача № 2. (Голованов А.) *Дополненная десятичная запись* натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018\,2018\,2018\ldots2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)?

Ответ: 2^{100}.

Решение. Пусть в дополненной десятичной записи числа $N = \sum k = 0^m a_k \cdot 10^k$ слагаемое 10^k встречается 10 раз (то есть $a_k = 10$. Тогда остаток от деления N на 10^{k+1} не может быть больше, чем $\sum i = 0^{k-1} 10 \cdot 10^i = \sum i = 1^k 10^i = 111\ldots1110$ (в последнем случае имеется в виду обычная десятичная запись, и в ней k единиц).

У числа $N = 20182018\ldots2018 = \sum\limits_{j=1}^{100} (2 \cdot 10^{4j-1} + 10^{4j-3} + 8 \cdot 10^{4j-4})$ остаток от деления на 10^{4j} при $1 \leqslant j \leqslant 100$ равен $2018\ldots2018 > 2 \cdot 10^{4j-1}$, на 10^{4j-2} равен $182018\ldots2018 > 111\ldots1110$, на 10^{4j-3} равен $82018\ldots2018 \geqslant 8 \cdot 10^{4j-4}$. Поэтому a_k может быть равно 10 только при $k = 4j-2$, $1 \leqslant j \leqslant 100$.

С другой стороны, a_k может быть равно 10 для любого набора k такого вида (поскольку слагаемое $2 \cdot 10^{4j-1} + 10^{4j-3} + 8 \cdot 10^{4j-4}$ можно заменить на $1 \cdot 10^{4j-1} + 10 \cdot 10^{4j-2} + 10^{4j-3} + 8 \cdot 10^{4j-4}$).

Выбрать такой набор можно 2^{100} способами.

Задача № 3. (Сатылханов К.) Пусть $\mathbb{R}^+$ — множество положительных действительных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что

$$f\left(3f(xy)^2 + (xy)^2\right) = \left(xf(y) + yf(x)\right)^2$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Ответ: $f(x) = x$ и $f(x) = x/3$ для любого $x > 0$.

Решение. Из условия следует, что

$$xf(y) + yf(x) = af(b) + bf(a). \tag{1}$$

для любых $a, b, x, y > 0$ таких, что $ab = xy$. Рассмотрим произвольное число $t > 0$. Пусть $f(1) = c$. Из (1) при $x = t^n$, $y = 1$, $a = t^{n-1}$, $b = t$ следует, что

$$f(t^n) = t^{n-1}f(t) + tf(t^{n-1}) - ct^n \tag{2}$$

для любого натурального n. Из (2) индукцией по n легко доказать, что

$$f(t^n) = t^{n-1}\left(nf(t) - (n-1)ct\right)$$

для любого натурального n. Таким образом, $nf(t) > (n-1)ct$ для любого натурального n, следовательно $f(t) \geqslant ct$ для любого $t > 0$. Тогда для любого $t > 0$ при $a = t$, $b = 1/t$, $x = y = 1$ из (1) следует, что

$$2c = t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{f(t)}{t} \geqslant t\left(c \cdot \frac{1}{t}\right) + \frac{ct}{t} = 2c.$$

Значит, $f(t) = ct$ для любого $t > 0$. Подставив это равенство в начальное условие и сократив на ненулевое произведение x^2y^2, получим:

$$c(3c^2 + 1) = 4c^2 \Leftrightarrow c(c-1)(3c-1) = 0.$$

Так как нас интересуют только положительные c, получим два значения $c_1 = 1$ и $c_2 = 1/3$. Следовательно, существуют две функции, удовлетворяющие условию задачи: $f(x) = x$ и $f(x) = x/3$, которые, как легко проверить, удовлетворяют условию задачи.

Задача № 4. (Сатылханов К.) Даны натуральные числа a, b, c и d такие, что числа a и b взаимно просты и $a > b$. Известно, что число c^2 делится на $a^2 + b$, а число d^2 делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $cd > 2a^2$.

Решение. Пусть x, y, m и n – такие натуральные числа, что $a^2 + b = x^2m$, $a^2 + b^2 = y^2n$, и ни одно из чисел m и n не делится на квадрат простого числа.

Так как $a^2 < a^2 + b < a^2 + a < (a+1)^2$, то $m \neq 1$, значит $m \geqslant 2$. По условия следует, что c делится на xm, следовательно

$$c^2 \geqslant (xm)^2 = m(a^2 + b) > ma^2. \tag{1}$$

Аналогично

$$d^2 > na^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$cd > a^2\sqrt{mn}. \tag{3}$$

Если $n \geqslant 2$, то $mn \geqslant 4$ и из (3) следует, что $cd > 2a^2$.

Теперь будем считать, что $n = 1$, то есть

$$a^2 + b^2 = y^2. \tag{4}$$

Если число ab не делится на 3, тогда $a^2+b^2 \equiv 2 \not\equiv y^2 \pmod 3$, что невозможно. Аналогично, если ab не делится на 2, то $a^2+b^2 \equiv 2 \not\equiv y^2 \pmod 4$, что также невозможно. Значит, ab делится на 6. Но, так как числа a и b взаимно просты, то ровно одно из них делится на 2 и ровно одно из них делится на 3. Следовательно числа a^2+b и 6 взаимно просты. Тогда $m \geqslant 5$, и из (3), следует, что $cd > a^2\sqrt{5} > 2a^2$, что и требовалось доказать.

Задача № 5. (Сатылханов К.) Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c \in$ $\in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\left(\sqrt{2}a - bc\right)\left(\sqrt{2}b - ca\right)\left(\sqrt{2}c - ab\right) \leqslant \frac{1}{8}.$$

Первое решение. Обозначим $A = \left(\sqrt{2}a - bc\right)\left(\sqrt{2}b - ca\right)\left(\sqrt{2}c - ab\right)$. Можно считать, что каждая из трех скобок числа A неотрицательна.

Действительно, предположим, что хотя бы одно из чисел $\sqrt{2}a - bc$, $\sqrt{2}b - ca$, $\sqrt{2}c - ab$ отрицательно. Пусть, без потери общности, $\sqrt{2}a - bc < 0$. Тогда $ca < \dfrac{bc^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}b$ и, аналогично, $bc < \sqrt{2}a$. В этом случае $A \leqslant 0$.

Теперь будем считать, что каждое из чисел $\sqrt{2}a - bc$, $\sqrt{2}b - ca$, $\sqrt{2}c - ab$ неотрицательно. По неравенству Коши имеем:

$$4 \cdot \sqrt{(\sqrt{2}a - bc)(\sqrt{2} - ca)} \leqslant 2\left((\sqrt{2}a - bc) + (\sqrt{2} - ca)\right) = (a+b)(2\sqrt{2} - 2c). \qquad (1)$$

Аналогично, записав такие неравенства для других пар и перемножив их, получим:

$$64A \leqslant (a+b)(b+c)(c+a)(2\sqrt{2} - 2a)(2\sqrt{2} - 2b)(2\sqrt{2} - 2c) = B. \qquad (2)$$

Оценим число B по неравенству Коши для шести чисел:

$$B \leqslant \left(\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a) + (2\sqrt{2} - 2a) + (2\sqrt{2} - 2b) + (2\sqrt{2} - 2c)}{6}\right)^6 = 8. \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) вытекает требуемое неравенство $A \leqslant \frac{1}{8}$.

Второе решение. Докажем, что если x, y, z, x_1, y_1 – положительные числа, $xy = x_1y_1$ и $|x-y| > |x_1 - y_1|$, то

$$\left(\sqrt{2}x - yz\right)\left(\sqrt{2}y - xz\right) < \left(\sqrt{2}x_1 - y_1z\right)\left(\sqrt{2}y_1 - x_1z\right).$$

Действительно, после раскрытия скобок и сокращения равных членов остается неравенство $\sqrt{2}z(x_1^2 + y_1^2) < \sqrt{2}z(x^2+y^2)$, получающееся из неравенства $(x_1 - y_1)^2 < (x-y)^2$ добавлением $4x_1y_1 = 4xy$ и умножением на z.

Рассмотрим теперь функцию $f(a,b,c) = \left(\sqrt{2}a - bc\right)\left(\sqrt{2}b - ca\right)\left(\sqrt{2}c - ab\right)$ при положительных a, b и c. Мы видели, что если $xy = x_1y_1$ и $|x-y| > |x_1 - y_1|$, то $f(x,y,z) < f(x_1, y_1, z_1)$. Пусть $m = \sqrt[3]{abc}$ – среднее геометрическое чисел a, b и c. Среди них есть число, большее m, и число, меньшее m; не умаляя общности, примем $a \leqslant m \leqslant b$. Тогда $f(a,b,c) \leqslant f(m, b', c)$, где $b' = \frac{ab}{m} = \frac{m^2}{c}$. Поскольку $b'c = m^2$ (и, разумеется, $|b' - c| \geqslant |m - m|$), имеем $f(m, b', c) \leqslant$ $\leqslant f(m,m,m)$. Отсюда $f(a,b,c) \leqslant f(m,m,m)$. Осталось доказать, что $f(m,m,m) = (\sqrt{2}m -$ $- m^2)^3 \leqslant \frac{1}{8}$, то есть $\sqrt{2}m - m^2 \leqslant \frac{1}{2}$, а это неравенство $\left(m - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Задача № 6. (Кунгожин М.) Диагонали вписанного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть ℓ — прямая, делящая угол AOB пополам. Обозначим через (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) невырожденный треугольник, образованный прямыми ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Пусть $\Delta_1 = (\ell, AB, CD)$ и $\Delta_2 = (\ell, AD, BC)$. Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются друг друга.

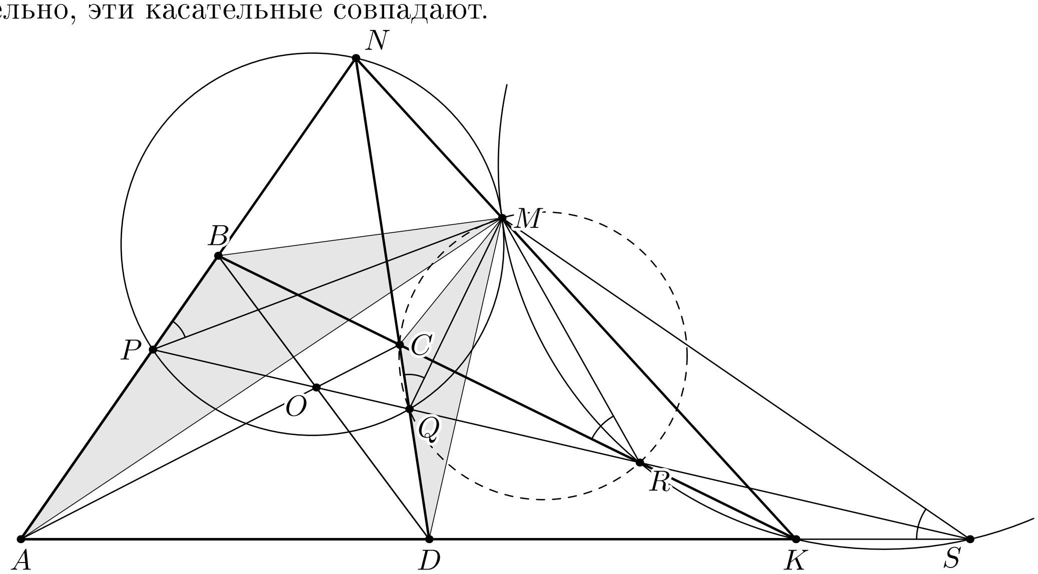
Решение. Пусть ℓ пересекает отрезки AB и CD соответственно в точках P и Q, и продолжения отрезков BC и AD — в точках R и S. Также введем следующие обозначения: $AB \cap CD = N$, $BC \cap AD = K$. Тогда $\Delta_1 = \triangle PQN$ и $\Delta_2 = \triangle RSK$.

Пусть M — точка Микеля четверки прямых AB, BC, CD и DA. Воспользуемся общеизвестным фактом о том, что M лежит на прямой NK (так как $ABCD$ — вписанный четырехугольник), и что M является центром поворотной гомотетии, переводящий треугольник ABM в подобный ему треугольник DCM. Так как $AP/BP = AO/BO = DO/CO = DQ/CQ$, то точки P и Q соответствующие точки в этих подобных треугольниках, что немедленно дает равенство $\angle MPB = \angle MQC$. Значит, точки P, Q, M, N лежат на одной окружности (обозначим эту окружность через ω_1).

Аналогично можно доказать, что точки R, S, M, K также лежат на одной окружности (обозначим эту окружность через ω_2).

Осталось доказать, что окружности ω_1 и ω_2 касаются.

Точки M, C, Q и R лежат на одной окружности, так как $\angle MCN = \angle MRQ$ (это внешние соответствующие углы подобных треугольников CDM и RSM). Обозначим $\angle MPN = \alpha$. Если к ω_1 провести касательную в точке M, то угол между этой касательной и прямой NK будет равен α. А если провести касательную к ω_2 в точке M, то угол между этой касательной и прямой NK также будет равен α, так как $\angle MPN = \angle MQC = \angle MRC = \angle MSK$. Следовательно, эти касательные совпадают.



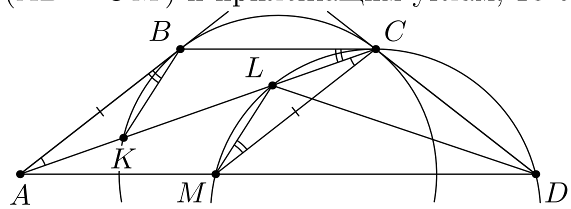
Решения задач 11 класса

Задача № 1. (Кунгожин М.) В равнобокой трапеции $ABCD$ точка O — середина основания AD. Окружность с центром в точке O и радиусом BO касается прямой AB. Пусть отрезок AC пересекает эту окружность в точке K ($C \neq K$), и пусть M такая точка, что $ABCM$ — параллелограмм. Описанная окружность треугольника CMD пересекает отрезок AC в точке L ($L \neq C$). Докажите, что $AK = CL$.

Решение. Из того, что $ABCM$ — параллелограмм и $ABCD$ — равнобокая трапеция, имеем следующие равенства:

$$\angle CDM = \angle MAB = \angle BCM,$$

то есть прямая BC касается описанной окружности четырехугольника $MLCD$. Откуда, имея в виду, что AB касается описанной окружности треугольника BCK, получим $\angle LMC = \angle LCB = \angle KBA$. Также понятно, что $\angle BAK = \angle LCM$. Поэтому треугольники ABK и CML равны по стороне ($AB = CM$) и прилежащим углам, то есть $AK = CL$.



Задача № 2. (Елиусизов Д.) Дано натуральное число $m \geqslant 2$. Последовательность натуральных чисел $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ назовем *вогнутой*, если $b_k + b_{k-2} \leqslant 2b_{k-1}$ для всех $2 \leqslant k \leqslant m$. Докажите, что существует не более 2^m вогнутых последовательностей, начинающихся с $b_0 = 1$ и $b_1 = 2$.

Решение. Из условия следует, что

$$b_m - b_{m-1} \leqslant b_{m-1} - b_{m-2} \leqslant \ldots \leqslant b_1 - b_0 = 1.$$

Значит, каждая вогнутая последовательность имеет вид

$$1, 2, \ldots, n, n, \ldots, n, b_{n+k}, \ldots, b_m,$$

где $2 \leqslant n \leqslant m+1$, число n записано $(k+1)$ раз, $0 \leqslant k \leqslant m+1-n$ и $n > b_{n+k} > \ldots > b_m$. Количество последовательностей $b_{n+k}, \ldots, b_m$ не более $C_{n-1}^{m+1-n-k}$ (так как $b_{n+k}, \ldots, b_m$ различные натуральные числа которые меньше чем n). Для $n = m+1$ таких последовательностей ровно 1. Для $2 \leqslant n \leqslant m$ таких последовательностей будет не более чем

$$C_{n-1}^{m+1-n} + C_{n-1}^{m-n} + \ldots + C_{n-1}^{0} \leqslant C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$$

(мы просуммировали по всем $k = 0, 1, \ldots, m+1-n$). Значит, всего вогнутых последовательностей будет не более чем

$$2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{m-1} + 1 = 2^m - 1 < 2^m.$$

Задача № 3. (Сатылханов К.) $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Существует ли функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любых натуральных m и n выполнено равенство

$$f(mf(n)) = f(m)\, f(m+n) + n?$$

Ответ: не существует.

Решение. Решение: Предположим, что такая функция существует. Обозначим через $P(m,n)$ равенство $f(mf(n)) = f(m)f(m+n)+n$ и пусть $f(1)=c$.

$P(1,1): f(c) = cf(2)+1$, отсюда легко следует, что $c \geqslant 3$ и $f(c) \equiv 1 \pmod{c}$.

$$P(1,n): \quad f(f(n)) = cf(n+1)+n, \tag{1}$$

$$P(n,1): \quad f(cn) = f(n)f(n+1)+1. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$f(f(n)) \equiv n \pmod{c}, \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

Если $n \vdots c$, то, используя (3) получаем, что

$$P(f(n),1): \quad f(cf(n)) = f(f(n)) \cdot f(f(n)+1)+1 \equiv 1 \pmod{c}.$$

Тогда

$$P(c,n): \quad f(cf(n)) = f(c)f(n+c)+n \Rightarrow f(n+c) \equiv 1 \pmod{c}.$$

Значит, $f(n) \equiv 1 \pmod{c}$ для любого $n \vdots c$.

$$P(c,n): \quad f(cf(n)) = f(c) \cdot f(n+c)+n \Rightarrow f(n+c) \equiv 1-n \pmod{c}, \text{ для любого } n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

В силу (4) при $n = c+2$ из (2) следует, что

$$1 \equiv f(c+2)f(c+3)+1 \equiv (-1)\cdot(-2)+1 \equiv 3 \pmod{c},$$

что невозможно, так как $c \geqslant 3$, противоречие.

Задача № 4. (Сатылханов К.) Докажите, что для любых действительных чисел $a,b,c,d \in$ $\in (0,1)$ выполняется неравенство

$$(ab-cd)(ac+bd)(ad-bc)+\min(a,b,c,d) < 1.$$

Решение. Без потери общности можно предположить, что $a \geqslant c$. Так как $a,b,d < 1$, то по неравенству Коши имеем:

$$(ab-cd)(ad-bc) \leqslant \left(\frac{(ab-cd)+(ad-bc)}{2}\right)^2 = \frac{(b+d)^2(a-c)^2}{4} < (1-c)^2, \tag{1}$$

и

$$ac+bd < c+1. \tag{2}$$

Перемножив неравенства (1) и (2), получим:

$$(ab-cd)(ac+bd)(ad-bc) < (1-c)^2(1+c) = (1-c)(1-c^2) < 1-c \leqslant 1-\min(a,b,c,d).$$

Задача № 5. (Сатылханов К.) Дано множество $S = \{xy(x+y) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$. Пусть a и n натуральные числа такие, что $a+2^k \in S$ для каждого $k = 1,2,\ldots,n$. Найдите наибольшее возможное значение n.

Ответ: 3.

Решение. Легко заметить, что при всех натуральных x и y

$$xy(x+y) \equiv 0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7 \pmod 9.$$

Следовательно, $s \not\equiv 1,\ 4,\ 5,\ 8 \pmod 9$ для любого $s \in S$.

Заметим, что $2^6 \equiv 1 \pmod 9$.

Теперь, для каждого $a \equiv 0,\ 1,\ \ldots,\ 8 \pmod 9$ выпишем числа $a+2^i \pmod 9$, где $1 \leqslant i \leqslant 9$.

$$\begin{gathered}
2,\ 4,\ 8,\ 7,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8;\\
3,\ 5,\ 0,\ 8,\ 6,\ 2,\ 3,\ 5,\ 0;\\
4,\ 6,\ 1,\ 0,\ 7,\ 3,\ 4,\ 6,\ 1;\\
5,\ 7,\ 2,\ 1,\ 8,\ 4,\ 5,\ 7,\ 2;\\
6,\ 8,\ 3,\ 2,\ 0,\ 5,\ 6,\ 8,\ 3;\\
7,\ 0,\ 4,\ 3,\ 1,\ 6,\ 7,\ 0,\ 4;\\
8,\ 1,\ 5,\ 4,\ 2,\ 7,\ 8,\ 1,\ 5;\\
0,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 8,\ 0,\ 2,\ 6;\\
1,\ 3,\ 7,\ 6,\ 4,\ 0,\ 1,\ 3,\ 7.
\end{gathered}$$

Отсюда видно, что для каждого $a \equiv 0, 1, \ldots, 8 \pmod 9$ и $1 \leqslant i \leqslant 6$ хотя бы одно из чисел $a+2^i$, $a+2^{i+1}$, $a+2^{i+2}$, $a+2^{i+3}$ дает остаток 1, 4, 5 или 8 при делении на 9. Значит $n \leqslant 3$.

Для $n = 3$ подходит число $a = 124$, так как

$$126 = 2 \cdot 7 \cdot (2+7), \quad 128 = 4 \cdot 4 \cdot (4+4), \quad 132 = 1 \cdot 11 \cdot (1+11).$$

Задача № 6. (Седракян Н.) Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle AMB = \angle ADM + \angle BCM$ и $\angle AMD = \angle ABM + \angle DCM$. Докажите, что

$$AM \cdot CM + BM \cdot DM \geqslant \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}.$$

Решение. Проведем касательную прямую ℓ в точке M к описанной окружности треугольника BCM. Тогда, угол между ℓ и прямой BM равен углу BCM. Следовательно, угол между ℓ и прямой AM равен углу ADM. Поэтому, описанные окружности треугольников BCM и ADM касаются ℓ, в частности, касаются друг друга.

Аналогично, описанные окружности треугольников ABM и CDM также касаются друг друга.

Сделаем инверсию с центром M и радиусом R. Тогда вышерассматриваемые четыре окружности перейдут в пары параллельных прямых, образуя параллелограмм.

Если A', B', C', D', M' — соответственно образы точек A, B, C, D, M, то для параллелограмма $A'B'C'D'$ и точки M', лежащей внутри этого параллелограмма, необходимо доказать неравенство

$$A'M' \cdot C'M' + B'M' \cdot D'M' \geqslant \sqrt{A'B' \cdot B'C' \cdot C'D' \cdot A'D'} = A'B' \cdot B'C' \tag{1}$$

Пусть, при параллельном переносе точки M' на вектор $C'B'$, точка M' перейдет в точку N'. Тогда неравенство (1) эквивалентно неравенству $B'M' \cdot A'N' + A'M' \cdot B'N' \geqslant A'B' \cdot N'M'$, что очевидно следует из неравенства Птоломея, для четверки точек A', M', B', N'.

Схемы оценки задач 9 класса

Задача 9.1

1. Доказательство параллельности $BY \parallel DZ$ — 3 балла.

Задача 9.2

1. Преобразование $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$ или любое похожее — 1 балл
2. Полное решение — 7 баллов

Задача 9.3

1. За правильный ответ — 1 балл
2. Доказательство для числа 2018 — 1 балл
3. Нестрогое доказательство того, что есть 2 случая — минус 1 балл
4. Нестрогое доказательство перехода — минус 1 балл
5. Полное решение — 7 баллов

Задача 9.4

1. За правильную раскраску, откуда легко следует противоречие — 1 балл
2. Полное решение — 7 баллов

Задача 9.5

1. Получено неравенство между показательной функцией и многочленом — 4 балла
2. Полное решение — 7 баллов
3. Снимаются баллы за нерасмотренные частные случаи или если не доказано обратное неравенство для больших чисел.

Задача 9.6

1. Полное решение — 7 баллов
2. Промежуточных баллов нет

Схемы оценки задач 10 класса

Задача 10.1

1. Любое недоведенное счетное решение (через синусы, теоремы Менелая и Чевы, и т.д) — 0 баллов

Задача 10.2

1. За правильный ответ — 1 балл
2. Доказательство для числа 2018 — 1 балл
3. Нестрогое доказательство того, что есть 2 случая — минус 1 балл
4. Нестрогое доказательство перехода — минус 1 балл
5. Полное решение — 7 баллов

Задача 10.3

1. Выведено равенство $xf(y) + yf(x) = af(b) + bf(a)$ для $x, y, a, b > 0$ и $xy = ab$ — 1 балл
2. За уравнение (2) из решения — 0 баллов
3. Выведено $f(t^n) = t^{n-1}(nf(t) - (n-1)ct)$, где $c = f(1)$ — 2 балла
4. Доказано, что $f(t) \geqslant ct$, где $c = f(1)$ — 4 балла
   (не суммируется с остальными баллами)
5. Полное решение — 7 баллов
6. Отсутствие проверки — минус 2 балла
7. Только ответ — 0 баллов
8. За уравнение $xf(1/x) + f(x)/x = 2f(1)$ — 0 баллов

Задача 10.4

1. За доказательство $c^2 \geqslant 2(a^2 + b)$ — 1 балл
2. Если $d^2 \geqslant 2(a^2 + b^2)$, то $cd > 2a^2$ — 1 балл
   пункты (1) и (2) не суммируются
3. $c^2 \geqslant m(a^2+b)$ и $d^2 \geqslant n(a^2+b^2)$ и $cd > a^2\sqrt{mn}$, где m, n обладают свойствами из решения — 2 балла
4. Если $d^2 = a^2 + b^2$, то $c^2 \geqslant 5(a^2 + b^2)$ (следовательно, $cd > a^2\sqrt{5}$) — 3 балла
5. Полное решение — 7 баллов
6. Попытка сделать оценку, используя $c^2 \geqslant a^2 + b$, $d^2 \geqslant a^2 + b^2$ — 0 баллов

Задача 10.5

1. Доказательство того, что каждый из трех множителей A можно брать как неотрицательное число — 1 балл
2. В полном решении не рассмотрел знаки скобок числа A — минус 2 балла
3. За открытие скобок или за замену переменных — 0 баллов
4. За использование неизвестных теорем — 0 баллов

Задача 10.6

1. За доказательство равнобедренности $\triangle_1$ ($\triangle_2$) — 1 балл
2. Доказано, что $PNMQ$ ($MSKR$) — 5 баллов
   (не суммируется с пунктом 1)
3. За допущенные ошибки в доказательстве — снимается до 3 баллов

Схемы оценки задач 11 класса

Задача 11.1

1. Доказано, что BC касается описанной окружности CDM — 2 балла
2. Доказано, что $\angle ABK = \angle CML$ — 2 балла

Задача 11.2

1. расмотрение структуры последовательности как "горки": $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n = b_n \geqslant \geqslant \ldots \geqslant b_m$ — 1 балл
2. доказательство структуры последовательности $(1, 2, 3, \ldots, n, n, \ldots, n, b_{n+k}, \ldots, b_m)$ — 1 балл
3. Подсчет количества убывающих последователостей (или аналогичных подсчетов приводящих к решению) — 2 балла
4. Правильное решение с помощью индукции, без доказательства инъективности соответствия при переходе индукции — минус 2 балла
5. Полное решение — 7 баллов

Задача 11.3

1. $f(1) \geqslant 3$ или $f(n) \geqslant 3$ для любого n — 1 балл
2. $f(f(n)) \equiv n \pmod c$, где $c = f(1)$ — 1 балл
3. $f(n) \equiv 1 \pmod c$ для $n \vdots c$ — 2 балла
4. $f(n+c) \equiv 1 - n \pmod c$ для любого n — 2 балла

Задача 11.4

1. За доказательство $(ab - cd)(ad - bc) \leqslant \dfrac{(b+d)^2(a-c)^2}{4} < (1-c)^2$ — 2 балла
2. Полное решение — 7 баллов
3. При полном решении, за легко исправимые ошибки снимаются баллы

Задача 11.5

1. правильный ответ с примером — 1 балл
2. рассмотрение остатка от деления $(x+y)^3 - x^3 - y^3$ по модулю (не 2) — 1 балл
3. полное решение 7 баллов

Задача 11.6

1. Полная инверсия с доказательством того, что $A'B'C'D'$ — параллелограмм, и правильным преобразованием неравенства — 4 балла
2. Доказано, что описанные окружности треугольников ADM и BCM (ABM и CDM) касаются — 0 баллов