Олимпиада имени Шалтая Смагулова по математике
Второй тур, 6 класс, 19 ноября, 2017 г.

Решения задач.

1. Можно ли из полосок 1×1, 1×2, …, 1×13 сложить прямоугольник со сторонами больше 1 (нужно использовать все полоски)? **(4 балла)**

Ответ: да, можно. Этот пример легко подобрать, если подсчитать заранее площадь требуемого прямоугольника: $1+2+\ldots+13=91=13\cdot7$.

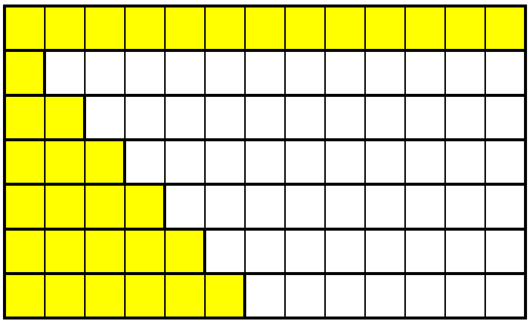

Схема оценивания:

- Посчитана площадь получаемого прямоугольника, но нет примера: 1 балл;
- Верный пример: 4 балла.

2. Среднее арифметическое четырех чисел равно 10. Если вычеркнуть одно из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся трех увеличится на 1, если вместо этого вычеркнуть другое число, то среднее арифметическое оставшихся чисел увеличится на 2, а если вычеркнуть только третье число, то среднее арифметическое оставшихся увеличится на 3. На сколько изменится среднее арифметическое трех оставшихся чисел, если вычеркнуть четвертое число? **(5 баллов)**

Ответ: уменьшится на 6. Из того, что среднее арифметическое четырех чисел равно 10 следует, что сумма этих чисел равна 40. Аналогично, сумма трех чисел (без первого) равна 33, сумма трех чисел (без второго) равна 36, а сумма трех чисел (без третьего) равна 39. Из этих условий, получим: первое число равно 7, второе равно 4, третье равно 1. Таким образом, среднее арифметическое первых трех чисел равно 4, а это на 6 меньше, чем 10.

Аналогичные рассуждения можно провести алгебраически. Обозначив четыре числа через a, b, c и d соответственно, получим четыре равенства: $(a+b+c+d):4=10$, $(b+c+d):3=11$, $(a+c+d):3=12$, $(a+b+d):3=13$. Решением этой системы является четверка чисел: (7, 4, 1, 28).

Схема оценивания:

- Только ответ: 1 балл;
- Верно составлена система всех уравнений: 2 балла;
- Четверка чисел найдена подбором: только 2 балла;
- Полное решение: 5 баллов.

3. Имеются четыре монеты, неразличимые по внешнему виду, но все разного веса. Как с помощью чашечных весов без гирь за пять взвешиваний расположить монеты в порядке возрастания их веса? **(6 баллов)**

Решение. Обозначим монеты через A, B, C и D. Разобьем их по парам (A, B) и (C, D), за два взвешивания определим какая монета этих парах более легкая. Пусть A < B и C < D, тогда возможны только следующие шесть случаев (более легкая монета стоит левее): ABCD, ACBD, ACDB, CABD, CADB, CDAB.

Третьим взвешиванием сравним монеты B и D. Если B < D, то из выше приведенных случаев возможны лишь три: ABCD, ACBD, CABD.

Четвертым взвешиванием сравним A и C. Если A > C, то монеты будут расположены в виде CABD. Если A < C, то монеты могут быть расположены в виде ABCD или ACBD. Поэтому пятым взвешиванием сравнивая монеты B и C окончательно устанавливаем порядок монет. Если B < C, то ABCD, если B > C, то ACBD.

Если же результат третьего взвешивания B > D, то из выше приведенных случаев возможны три других варианта: ACDB, CADB, CDAB.

Четвертым взвешиванием сравним A и C. Если A < C, то монеты будут расположены в виде ACDB. Если A > C, то монеты могут быть расположены в виде CADB или CDAB. Поэтому пятым взвешиванием сравниваем монеты A и D окончательно устанавливаем порядок монет. Если D < A, то CDAB, если D > A, то CADB.

Схема оценивания:

- Разбиение по парам и нахождение наименьшего или наибольшего из них: 1 балл;
- Нахождение самой тяжелой монеты с помощь третьего взвешивания: 2 балла;
- Нахождение самой легкой монеты с помощью третьего взвешивания: 2 балла;
- С помощью четвертого и пятого взвешивания определить порядок монет по возрастанию: 2 балла.

4. Можно ли в клетки таблицы

а) 5×6 **(2 балла)**

б) 6×6 **(5 баллов)**

вписать числа 1 и -1 (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы суммы чисел во всех строчках и столбцах были разными?

Ответ: а) можно, б) нельзя.

а) Пример:

1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1

б) Наименьшее значение, которое может принимать сумма чисел в строчке или столбце таблицы 6×6, равно -6, а наибольшее равно 6. При этом каждая такая сумма может быть только четным числом, поскольку является суммой шести нечетных чисел (четное количество нечетных чисел в сумме дают четное число). Но среди чисел то -6 до 6 существует только 7 четных (-6, -4, -2, 0, 2, 4 и 6). А количество строчек и столбцов в таблице 6×6 равно12. Поэтому при любом заполнении таблицы 6×6 числами -1 и 1 среди ее строчек и столбцов найдутся такие, суммы чисел в которых будут одинаковы.

Схема оценивания:

а) верный пример: 2 балла;

б)

- Найдено наибольшее и наименьшее значение суммы чисел в таблице: 1 балл;
- Доказательство того, что суммы чисел в строках и столбцах будут четными: 2 балла;
- Доказательство того, что количество четных чисел в промежутке от -6 до 6 будет равно 7, а количество сумм – 12: 2 балла.

5. Клетчатый квадрат 2017×2017 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4. **(8 баллов)**

Решение. Пойдём от противного: пусть такого прямоугольника не найдётся. Заметим, что периметр любого целоклеточного прямоугольника является чётным числом. Периметр будет делиться на 4 тогда, когда обе стороны прямоугольника одной чётности и не будет в противном случае. Если все прямоугольники имеют периметр, не делящийся на 4, значит они все имеют одну чётную и одну нечётную сторону. В таком случае площадь каждого прямоугольника чётна. Но тогда чётна и сумма их площадей. А сумма их площадей есть площадь квадрата, $2017 \cdot 2017$, то есть нечетное число. Противоречие.

Схема оценивания:

- Замечено, что периметр любого целоклеточного прямоугольника является четным числом: 2 балла;
- В доказательстве от противного доказано, что сумма соседних сторон любого мелкого прямоугольника равна нечетному числу: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что соседние стороны любого мелкого прямоугольника имеют разную четность: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что площадь любого мелкого прямоугольника равна четному числу: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что площадь исходного прямоугольника равна четному числу: 1 балла.
- Указано противоречие: 1 балл.
- Полное решение: 8 баллов.