Задача 1

Решение 1

Докажем, что числа сравнимые с 5 при делении на 6 являются нефакториальными.
Пусть $a_1! + \ldots + a_s! = 5 \ (mod\ 6)$. Заметим, что можно считать, что $a_i \leq 2$ (так как начиная с $3!$ слагаемые будут давать остаток 0 в сумму). Значит, достаточно рассмотреть конечное число случаев.
$0!,\ 1!,\ 2!,\ 0! + 1!,\ 0! + 2!,\ 1! + 2!,\ 0! + 1! + 2!$ Ни одно из которых не сравнимо с 5 при делении на 6. Противоречие.

Решение 2

Докажем, что числа вида $(n! - 1)$ являются нефакториальными при $n > 3$. От противного, пусть $x = n! - 1$ является не нефакториальным при $n > 3$. Заметим, что в представлении числа x нет слагаемых вида $k!$, где $k \geq n$. Пусть $x = a_1! + \ldots + a_s!$, где a_i – различные неотрицательные целые числа не превосходящие n – 1. Тогда $x \leq 0! + 1! + 2! + \ldots + (n-1)!$ (1).
Покажем, что $0! + \ldots + (n-1)! + 1 < n!$
Это верно из неравенств: $0! + 1 < (n - 1)!$ и $i! \leq (n - 1)!$ Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.
Тогда $1 + 0! + 1! + \ldots + (n - 1)! < n!$ (2)
Используя (1) и (2) получаем, что $x + 1 \leq 0! + \ldots + (n-1)! < n!$.
Значит, $x < n! - 1$. Противоречие.

Задача 2

Решение

Заменим S по формуле Герона и докажем неравенство:

$$\sqrt{\frac{3a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{3b}{a+c-b}}+\sqrt{\frac{3c}{a+b-c}}\le\frac{1}{4\cdot\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}}$$

$<=> \sqrt{a(a+c-b)(a+b-c)}+\sqrt{b(b+c-a)(b+a-c)}+\sqrt{c(c+b-a)(c+a-b)}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$,

но $1=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ => $abc\le\frac{1}{27}$ => $a\le\frac{1}{27bc}$ =>

$\sqrt{a(a+c-b)(a+b-c)}+\sqrt{b(b+c-a)(b+a-c)}+\sqrt{c(c+b-a)(c+a-b)}\le$

$\sqrt{\frac{a+b-c}{b}\cdot\frac{a+c-b}{c}\cdot\frac{1}{27}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{a}\cdot\frac{b+c-a}{c}\cdot\frac{1}{27}}+\sqrt{\frac{c+b-a}{b}\cdot\frac{a+c-b}{a}\cdot\frac{1}{27}}\le$

$\sqrt{\frac{1}{27}}\left(\frac{\left(\frac{a+b-c}{b}+\frac{a+c-b}{c}\right)}{2}+\frac{\left(\frac{a+b-c}{a}+\frac{b+c-a}{c}\right)}{2}+\frac{\left(\frac{c+b-a}{b}+\frac{a+c-b}{a}\right)}{2}\right)=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ Что и требовалось доказать.

Задача 3

Рассмотрим фигуру и расположение первого заболевшего, при которых достигается максимальное отношение при заданном n. Раскрасим клетки в шахматном порядке, так что первый заболевшие окажется на клетке белого цвета. Заметим, что на нечетный день процесса, описанного в задаче, могут болеть только люди на белых клетках, а на четный день – люди, живущие на черных клетках. Так как соседи по стороне всегда разного цвета, следовательно если в i день болели некоторые люди на клетках только одного цвета, то на следующий $i+1$ день они все выздоровеют, и будут болеть только их соседи, живущие на клетках другого цвета. В первый день все болевшие были на клеткаъ одного цвета (всего один человек), следовательно утверждение доказано.

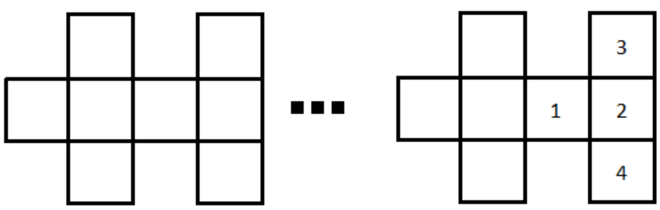
Теперь рассмотрим двудольный граф, в котором вершины будут обозначать клетки, а ребра будут проведены только между вершинами, которые обозначают соседние по стороне клетки. В одной доле будут вершины белого цвета, а в другой доле – вершины черного цвета. Тогда так как вся фигура связная, значит граф тоже будет связным. И из каждой вершины будет выходить не более четырех ребер. Обозначим доли как A и B, а x и y – количество вершин в этих долях соответственно, и пусть без ограничения общности $x \leq y$. Тогда из доказанного ранее следует, что так как в каждый день могут болеть только вершины из одной доли, то максимальное отношение числа болеющих к числу здоровых не превосходит $\frac{y}{x}$. Данное соотношение достигается только при условии, что все люди на клетках большего из цветов болеют в некоторый день, то есть задача сводится к нахождению максимального соотношения между количеством клеток двух цветов.

В нашем графе, из каждой вершины выходит не более 4 ребер. Отметим произвольную вершину из B и все вершины из A с которыми она связана (не более четырех), затем в силу связности, из вершин B можно будет выделить такую, которая имеет с первой отмеченной вершиной хотя бы одну общую вершину из A. На втором шаге отметим данную вершину из B и все вершины из A с которыми она связана, таким образом количество вершин в A увеличится максимум на три. И так далее, на каждом шаге будем отмечать новую вершину из B, имеющую хотя бы одну уже отмеченную вершину из A, и все смежные с данной вершиной. Будем продолжать данную операцию, пока не отметим все вершины из доли B, легко понять, что в доле A к этому моменту все вершины так же будут отмечены. Таким образом на каждом шаге, кроме первого, добавлялось не более трех новых вершин в долю A, значит $y \leq 3x + 1$ и далее в зависимости от остатка при делении n на 4 можно выделить максимальное отношение y к x:

Если $n = 4k + 1$ => $\frac{3k+1}{k}$. Если $n = 4k + 2$ => $\frac{3k+1}{k+1}$. Если $n = 4k + 3$ => $\frac{3k+2}{k+1}$.

Если $n = 4k + 4$ => $\frac{3k+3}{k+1}$

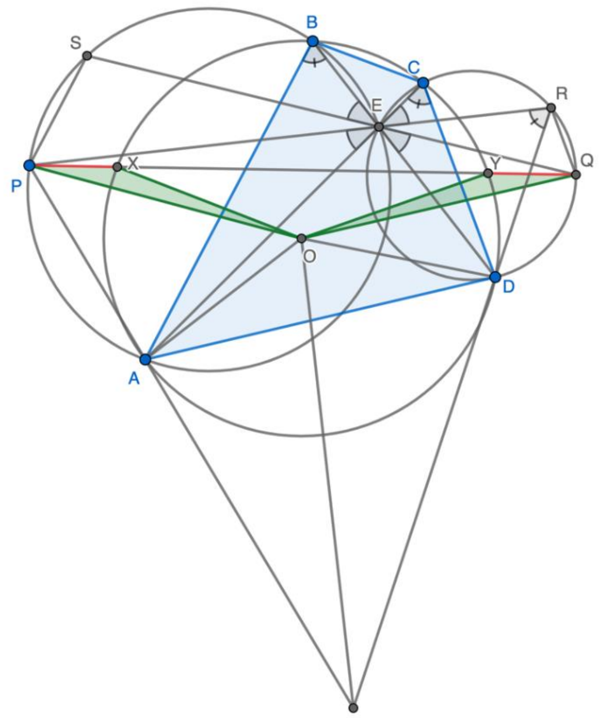
Пример:



Клетки последней фигуры в форме «Т» добавляются по одной в указанном порядке, в зависимости от остатка n при делении на 4.

Задача 4

Решение



Пусть $\angle ABD = \varphi$. Тогда $\angle ACD = \varphi$ (так как $ABCD$ – вписанный четырёхугольник). Пусть O – центр окружности Г. Заметим, что достаточно доказать, что $OP = OQ$, потому что тогда треугольники OXP и OYQ будут равны (по двум углам и стороне). Пусть $PE \cap \omega_2 = R$ и $QE \cap \omega_1 = S$.

Заметим, что $\angle AEP = \angle BES$, значит $\overset{\frown}{BS} = \overset{\frown}{PA}$, а значит $APSB$ – равнобокая трапеция, следовательно серединный перпендикуляр к AB является также серединным перпендикуляром к PS. Но точка O принадлежит серединному перпендикуляру к AB, откуда получаем, что серединный перпендикуляр к PS проходит через точку O. Значит $OP = OS$. Аналогично $OR = OQ$. Значит достаточно доказать, что $OP = OR$.

Заметим, что один из углов ABE и BAE – острый. Без ограничения общности положим, что угол ABE острый.

$$\angle EPA = \angle EBA = \varphi = \angle ECD = \angle ERD.$$

Тогда пусть $PA \cap RD = T$. Из () следует, что PTR – равнобедренный треугольник. Докажем, что TO – биссектриса угла PTR. Тогда ТO будет серединным перпендикуляром к PR, а значит отрезки OP и OR будут равны.

$$\angle AOD = 2\angle ABD = 2\varphi; \;\; \angle ATD = \angle PTR = 180° - 2\angle TRP = 180° - 2\varphi.$$

Значит $AODT$ – вписанный четырёхугольник, но $AO = OD$, следовательно TO – биссектриса угла ATD.