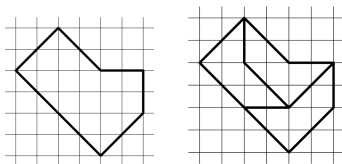


3-я олимпиада по математике имени Шалтая Смагулова
Заключительный этап, 15 июня, 2019 г. 6 класс

№1. Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). (Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.)



Решение. Смотри рисунок выше.

№2. Вычислите сумму:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{999}{1000}.$$

Ответ: 249750.

Решение. По методу Гаусса мы знаем как вычислить сумму первых n натуральных чисел: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Возьмем некоторые слагаемые в отдельные скобки:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{999}{1000} \right).$$

Общий вид каждой скобки следующий:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Если применить этот вид для каждой скобки, то получим:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{999}{2} = \frac{\frac{999 \cdot 1000}{2}}{2} = 249750.$$

№3. Асан и Хасан под наблюдением жюри играют в следующую игру. Жюри выбирает натуральное число n , имеющее 100 делителей, и выписывает на доске все эти делители, затем на бумаге рисует две горизонтальные *таблицы* размеров 50×1 , и соответствующие клетки соединяет отрезком.

Каждый игрок своим ходом должен выбрать какой-то делитель с доски, переписать его в одну свободную клетку бумаги, и стереть этот делитель с доски. Когда все клетки таблицы заполнены, игра заканчивается.

После этого жюри на каждом отрезке пишет произведение чисел записанных в клетках, соединяющих эти отрезки, а затем все полученные произведения складывает.

Если полученная сумма делится на n , то первый игрок проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если игру начинает Асан, а далее ходят по очереди?

Ответ: При правильной игре выиграет Хасан (второй игрок).

Решение. Приведем стратегию (ход действий) второго игрока ведущий к победе. Как известно, если все делители числа выписать в порядке возрастания, то выполняется следующая закономерность: разделив наше число на первый его делитель, получаем первый с конца, разделив его на второй делитель, получаем второй с конца, и т.д. Поэтому все 100 делители числа n можно разбить на пары (первый с последним, второй с предпоследним, и т.д.) так, чтобы произведение чисел в этих парах были равны n .

Хасан разбивает числа на пары. Если Асан (первый игрок) поставил какой-то делитель на один конец одного отрезка, то Хасан поставит пару этого числа на другой. Таким образом сумма, вычисленное жюри, будет равно $50n$, то есть делится на n .

№4. Десятичная запись числа $5 \cdot A$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестёрок. Найдите сумму цифр числа A .

Ответ: 4000.

Решение. Сумма цифр числа A , очевидно, равна сумме цифр числа $2 \cdot 5A$. Рассматривая умножение на 2 «в столбик», можно заметить, что пятерка дает «0», в соответствующий разряд произведения, а шестерка — «2», кроме того, к каждому разряду прибавляется перенесенная из предыдущего единица. Таким образом, искомая сумма цифр равна $0 \cdot 1000 + 2 \cdot 1000 + 2000 = 4000$.

№5. Для набора, состоящей из четырёх чисел, посчитали сумму всевозможных пар, и получили следующие суммы: 189, 320, 287, 264, x и y . Чему может быть равно наибольшее возможное значение суммы $x + y$?

Ответ: 761.

Решение. Пусть a, b, c, d — данный набор. Рассмотрим два случая:

1. Без общего числа $x = a + b$ и $y = c + d$. Тогда остальные четыре пары: $a + d, a + c, b + c, b + d$ будут равны 189, 320, 287, 264 в некотором порядке. Сложив эти четыре суммы получим: $a + d + a + c + b + c + b + d = 1060$ и $x + y = a + b + c + d = 530$.

2. Одно общее число $x = a + b$ и $y = a + c$. Тогда остальные четыре пары: $a + d, b + c, c + d, b + d$ будут равны 189, 320, 287, 264 в некотором порядке. Заметим, что: $x + y = 2(a + d) + 2(b + c) - (b + d) - (c + d) \leq 2(320 + 287) - (264 + 189) = 761$. Максимальное значение достигается когда: $(a, b, c, d) = (237, 181, 106, 83)$.

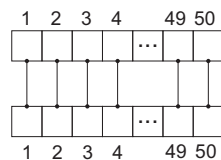


Рис. 1

3-я олимпиада по математике имени Шалтая Смагулова
Заключительный этап, 15 июня, 2019 г. 7 класс

№1. Существует ли перестановка $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ чисел $1, 2, 3, \dots, 30$ такая, что число $a_k + k$ является полным квадратом для каждого k от 1 до 30?

Ответ: Да. Например, первые пять членов выберем следующим образом: $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 4$, а остальные члены определим по формуле $a_k = 36 - k$, для всех $k = 6, 7, \dots, 30$.

№2. Умножая на калькуляторе, мальчик заметил, что если произведение больше миллиарда, то калькулятор выдает ответ «E». Он взял 10 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ и составил «таблицу умножения», в которой отметил все результаты, равные E. Докажите, что при составлении таблицы он ошибся.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	E		E		E
b_2	E	E	E		
b_3	E		E		E
b_4	E				
b_5	E	E	E	E	E

Решение. Присмотримся к этой таблице умножения повнимательней. Так как $b_1 \cdot a_5 = E$ и $b_1 \cdot a_2 \neq E$, то $a_5 > a_2$. А так как $b_2 \cdot a_5 \neq E$ и $b_2 \cdot a_2 = E$, то $a_5 < a_3$. Противоречие.

№3. По кругу расставлены сто чисел. Для каждого числа подсчитывают сумму 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Затем исходные числа стирают, а вместо них записывают вычисленные суммы. Докажите, что после многократного повторения этой операции все числа станут четными.

Решение. Все числа станут четными после четырех шагов (операций).

Решение 1. После первого шага сумма чисел станет четной, так как она будет ровно в 50 раз больше первоначальной суммы (каждое число входит ровно в 50 пятидесяток, суммы которых вычисляются при выполнении операции). После второго шага любые два противоположных числа на окружности будут иметь одинаковую четность, так как их сумма равна сумме всех чисел после первого шага, то есть четному числу. После третьего шага все числа будут иметь одинаковую четность. Действительно, после выполнения операции разность двух соседних чисел равна разности двух противоположных чисел до операции, а разности противоположных чисел после второго шага четны. Значит, после третьего шага любые два соседних числа имеют одинаковую четность, поэтому все числа имеют одинаковую четность. Наконец, после четвертого шага любое число будет четным как сумма 50 чисел одинаковой четности.

Решение 2. Для любых двух расстановок ста чисел на окружности определим их сумму — расстановку, в которой на каждом месте стоит сумма соответствующих чисел из двух складываемых расстановок. Ясно, что при сложении расстановок результаты применения к ним описанной в условии операции тоже складываются. Любую расстановку натуральных чисел можно представить в

виде суммы нескольких «элементарных» расстановок, в которых на одном месте стоит единица, а на остальных — нули. Поэтому достаточно доказать утверждение задачи только для «элементарной» расстановки. Если следить только за четностью чисел, то в этом конкретном случае легко находятся результаты каждого шага: после первого шага 50 нечетных чисел подряд и 50 четных подряд, после второго шага 50 четных и 50 нечетных чисел чередуются, после третьего шага 100 нечетных чисел, после четвертого того шага — 100 четных чисел.

№4. Назовём два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ *почти равными*, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$.

а) Даны два почти равных треугольника. Верно ли что эти треугольники равны?

б) Даны три попарно почти равных треугольника. Верно ли, что среди них какие-то два треугольника обязательно равны?

Ответ: а) Нет. б) Да.

Решение. а) На рисунке 2 приведен пример почти равных треугольников ABC и ABD , но сами треугольники не равны. контрпример для обоих пунктов.

б) **Лемма.** У двух почти равных треугольников соответствующие равные углы не могут быть тупыми.

Доказательство. От противного. Пусть соответствующие равные углы тупые. Тогда в этих треугольниках совместим эти углы. И тогда также совместятся какие-то две равные стороны. Перпендикуляр из конца этого отрезка на сторону падает на продолжение стороны в обоих треугольниках. Тогда третьи вершины будут лежат по одну сторону от этого перпендикуляра, и вторые соответствующие стороны никогда не будут равны.

№5. Пусть $[x, y]$ означает НОК чисел x и y , а $[x, y, z]$ — НОК чисел x, y, z . Даны натуральные числа a, b, c, d . Обозначим $A = [a, b, c] \cdot [a, b, d] \cdot [a, c, d] \cdot [b, c, d]$ и $B = [a, b] \cdot [a, c] \cdot [a, d] \cdot [b, c] \cdot [b, d] \cdot [c, d]$. Докажите неравенство $A^6 \geq B^4$.

Решение. Если $A = 1$, то $a = b = c = d = 1$ и $B = 1$, и очевидно $A^6 = B^4$.

Пусть $A > 1$. Рассмотрим простой делитель p числа A .

Наибольшую степень числа p в разложении числа a обозначим через a_p (то есть это такое число, что a делится на p^{a_p} но не делится на p^{a_p+1}).

Пусть p входит в числа a, b, c, d в степенях a_p, b_p, c_p, d_p соответственно. (a_p, b_p, c_p, d_p это неотрицательные целые числа. Например, если b не делится на p , то $b_p = 0$.)

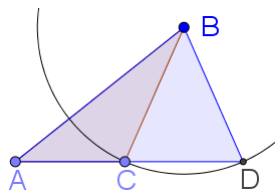


Рис. 2

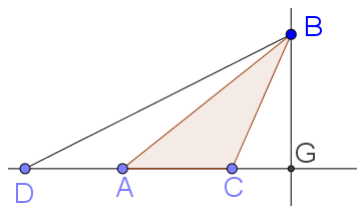


Рис. 3

Без потери общности предположим, что

$$a_p \geq b_p \geq c_p \geq d_p. \quad (1)$$

Тогда p входит в число A в степени $a_p + a_p + a_p + b_p = 3a_p + b_p$, а в число B в степени $a_p + a_p + a_p + b_p + b_p + c_p = 3a_p + 2b_p + c_p$. Тогда легко заметить, что степень вхождения числа p в число A^6 не меньше, чем в числе B^4 . Для этого достаточно заметить неравенство $6(3a_p + b_p) \geq 4(3a_p + 2b_p + c_p)$, которое легко следует из неравенства (1). Отсюда и немедленно следует объяснение неравенства $A^6 \geq B^4$, так как это можно сделать и для остальных простых делителей числа A .