Условия задач 7 классов

1. В бочке было 5 литров молока и, чтобы разбавить его, из нее отливают 1 литр молока и наливают 1 литр воды, позже из получившейся смеси отливают 1 литр и наливают 1 литр воды и так далее. Может ли, после нескольких таких переливаний, молоко оказаться разбавленным ровно наполовину? (***Фольклор***)
2. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, в котором $AC \perp BD$. Пусть M и N – середины сторон AB и CD, а точка O – центр описанной окружности $ABCD$. Докажите, что точки O, M, N и пересечение диагоналей AC и BD образуют параллелограмм. (***Фольклор***)
3. Назовем натуральное число a – *хорошим*, если $a^2 \vdots a + 2019$.
   а) Докажите, что если число a – хорошее, то число $a + 2019$ – составное.
   б) Найдите хотя бы два хороших числа. (***Ануарбеков Тынышбек***)
4. Докажите, что $2^k - 3k + 1 \vdots 9$, для всех нечетных натуральных k. (***Фольклор***)
5. Действительные положительные числа x и y таковы, что $(x^2 + 2y + 1)(y^2 + 2x + 1) = (x + 1)^4$
   Докажите, что $x = y$. (***Ануарбеков Тынышбек***)
6. К окружности с центром O и радиусом 100 см были проведены 600 секущих, не проходящих через O, каждая из которых отсекает хорду целочисленной длины (т.е. длина каждой хорды – целое число). Докажите, что пересечения каких-то четырех из этих секущих образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность. (***Кулболдин Данияр***)

Условия задач 8 классов

1. Назовем натуральное число a – *хорошим*, если $a^2 \vdots a + 2019$.
   а) Докажите, что если число a – хорошее, то число $a + 2019$ – составное.
   б) Найдите хотя бы два хороших числа. (***Ануарбеков Тынышбек***)
2. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах AB и AD взяты точки M и N, соответственно, так, что $2AM = 5MB$ и $AN = 20ND$. Пусть прямая NM пересекает продолжение стороны CB в точке X, а точка Y на стороне AB такая, что $DN = AY$. Докажите, что биссектриса $\angle ABN$ параллельна XY. (***Кулболдин Данияр***)
3. Даны действительные числа a, b, c, такие, что $a + b + c + 2 = abc$. Докажите, что
   $$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 4$$ (***Ануарбеков Тынышбек***)
4. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB \neq BC$), в котором биссектриса угла A пересекает прямые CD и BC в точках L и K. Пусть точка O – центр описанной окружности ΔCKL. Докажите, что O лежит на описанной окружности ΔBCD. (***Фольклор***)
5. Найдите все такие тройки простых чисел (p, q, r), что: $p^5 + q^3 = r^2 + 10$ (***Ануарбеков Тынышбек***)
6. На доске выписаны числа 1, 2, 3, ..., 200. Какое наибольшее количество чисел можно стереть с доски, чтобы среди оставшихся обязательно нашлись три числа, которые являются сторонами некоторого треугольника (мы не выбираем, какие именно числа стирать). (***Фольклор***)

Условия задач 9 классов

1. Натуральные числа $1, 2, 3, \dots, n$ $(n \geq 2)$ расставлены по кругу так, что каждые два соседних числа имеют хотя бы одну общую цифру в десятичной записи. Найдите наименьшее n, для которого это возможно. (***Фольклор***)
2. Даны натуральные числа a, b $(a > b)$ такие, что $(a^2 + 1)(b^2 + 1)$ – квадрат натурального числа. Докажите, что $a > 5b$. (***Ануарбеков Тынышбек***)
3. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N – середины сторон AB и CD, а O – такая точка снаружи $ABCD$, что $OM \perp AB$ и $ON \perp CD$. Точки P, Q, R, S – середины отрезков AN, CM, BN, DM, соответственно.
   Докажите, что если $S(PQRS) = S(MON)$, то $2(OK + OL) = AC + BD$,
   где K, L - середины диагоналей AC и BD, соответственно. (***Кулболдин Данияр***)
4. Даны такие натуральные числа m и n, что $m! + m$ делится на $n! + n$. Докажите, что $m \vdots n$. (***Ануарбеков Тынышбек***)
5. К окружности с центром O и радиусом 2019 была проведена 12121 секущая, не проходящих через O, каждая из которых отсекает хорду целочисленной длины. Докажите, что пересечения каких-то нескольких этих секущих образуют многоугольник (отличный от треугольника), в который можно вписать окружность. (***Кулболдин Данияр***)
6. a, b, c – такие положительные числа, что $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 < 8$
   (***Төлебергенов Ескендір***)