



*Сәрсенбі, 2019 ж. 10 сәуір*

**Есеп 4.**  $ABC$  үшбұрышының іштей сызылған шеңбердің ортасы  $I$  нүктесі болсын.  $B$  нүктеден өтетін және  $AI$  түзуді  $I$  нүктесінде жанайтын шеңбер екінші рет  $AB$  қабырғаны  $P$  нүктесінде қияды.  $C$  нүктеден өтетін және  $AI$  түзуді  $I$  нүктесінде жанайтын шеңбер екінші рет  $AC$  қабырғаны  $Q$  нүктесінде қияды.  $PQ$  түзуі  $ABC$  үшбұрышына іштей сызылған шеңберді жанайтынын дәлелдеңіз.

**Есеп 5.**  $n \geq 2$  — бүтін саны және  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — бүтін оң сандары болсын. Келесі үш шартты қанағаттандыратын  $b_1, b_2, \dots, b_n$  бүтін оң сандар табылатынын дәлелдеңіздер:

(A) кез келген  $i = 1, 2, \dots, n$  үшін  $a_i \leq b_i$ ;

(B)  $b_1, b_2, \dots, b_n$  сандардың  $n$ -ға бөлгенде қалдықтары бір-бірене тең емес; және

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$ .

(Осы есепте нақты  $x$  санның бүтін бөлігі  $[x]$  арқылы белгіленген, демек,  $x$ -тан аспайтын ең үлкен бүтін саны.)

**Есеп 6.** Алина шеңбердің ішіне төбелері беттеспейтін 2019 хорда салады. Нүкте *белгіленген* деп аталады, егерде ол

(i) хордалардың 4038 төбелердің бірі; немесе

(ii) кем дегенде екі хордалардың қиылысу нүктесі.

Алина әр белгіленген нүктені нөмірлейді. Алина (i)-шартты қанағаттандыратын 4038 нүктенің ішінен 2019 нүктені 0 санымен нөмірлейді, ал қалған 2019 нүктені 1 санымен нөмірлейді. Ол (ii)-шартты қанағаттандыратын әр нүктені кез келген бүтін санымен нөмірлейді (олар оң сандар болуы міндетті емес).

Алина әр хорданың бойында көршілес белгіленген нүктелерді қосатын кесінділерді қарастырады. (Егерде хордада  $k$  нүкте белгіленген болса,  $k - 1$  кесінді пайда болады.) Ол осындай әр кесіндіге сары белгі қояды — төбелер нөмірлердің қосындысы және көк белгі қояды — төбелер нөмірлердің айырмасының модулі.

Алина келесіні байқады: барлығы  $N + 1$  сары белгі бар, және олар барлық  $0, 1, \dots, N$  сандарды бір-бірден қамтиді. Кем дегенде бір көк белгі 3-ке бөлінетінін дәлелдеңіз.

(Шеңбердің кез келген екі әртүрлі нүктені қосатын кесінді *хорда* деп аталады.)