1. *За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и хитрецы, которые могут лгать или говорить правду по своему выбору. Всего 2018 человек. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед – лжец». «Мой правый сосед – хитрец». Какое наименьшее количество хитрецов могло сидеть за этим столом?*

Ответ: 674.

Решение. У каждого рыцаря правый сосед – хитрец. Значит, хитрецов не меньше, чем рыцарей. Левый сосед лжеца не может быть лжецом. Не может он быть и рыцарем (правый сосед рыцаря должен быть хитрецом). Значит, у каждого лжеца левый сосед – хитрец, и потому хитрецов за столом не меньше, чем лжецов. Значит, хитрецы – самая многочисленная из трёх сидящих за столом категорий людей, и потому их не меньше трети от общего числа сидящих, то есть не менее $\left\lceil \frac{2018}{3} \right\rceil = 673$.

Правый сосед лжеца не может быть хитрецом, но также он не может быть лжецом (левый сосед лжеца – хитрец). Значит, правый сосед лжеца – рыцарь. Поэтому рыцарей не меньше, чем лжецов. Левый сосед рыцаря – лжец. Значит, рыцарей не меньше, чем лжецов. Таким образом, за столом рыцарей и лжецов поровну.

Отсюда следует, что количество хитрецов – чётное число. То есть хитрецов не меньше 674.

Пример. Расположим по кругу против часовой стрелки 672 рыцаря, 672 лжеца и 674 хитреца следующим образом

ЛРХЛРХЛРХ…ЛРХХХ

2. *Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Кайрата, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 222 рукопожатия. Сколько рукопожатий сделал Кайрат?*

Ответ: 12.

Решение. Если каждый из m человек пожмет руки всем остальным, то все сделают по $m-1$ рукопожатий, а всего рукопожатий будет сделано $\frac{m(m-1)}{2}$, ибо в каждом из них участвуют двое.

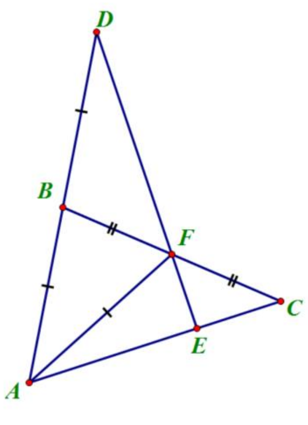
Пусть всего друзей (включая Кайрата) было n человек. Если бы каждый с каждым обменялся рукопожатием, то всего бы было сделано $\frac{n(n-1)}{2}$ рукопожатий. Следовательно, n – это первое число, для которого

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq 222.$$

Решив это неравенство, или просто подбором нетрудно убедиться, что $n = 22$, так как $\frac{21\cdot 20}{2} = 210 < 222 < \frac{21\cdot 21}{2} = 231$.

Таким образом, Кайрат не участвовал в 210 рукопожатиях, значит, он сделал $222 - 210 = 12$ рукопожатий.

3. *На продолжении стороны AB за точку B треугольника ABC выбрана точка D так, что $AB = BD = AF$, где точка F – середина BC. Отрезок DF продолжили до пересечения со стороной AC в точке E. Докажите, что $CE = EF$.*



Решение.

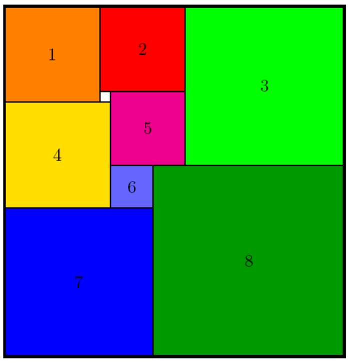
Пусть $\angle ABF = \angle AFB = \alpha$.

Тогда $\angle DBF = \angle AFC = 180° - \alpha$.

Значит, $\Delta DBF = \Delta AFC$ (по двум сторонам и углу между ними).

Следовательно, $\angle DFB = \angle ACF$.
Отсюда, $\angle EFC = \angle DFB = \angle ACF = \angle ECF$.
Таким образом, ΔFEC – равнобедренный, причём $CE = EF$.
Что и требовалось доказать.

4. *Прямоугольник разрезан на 9 квадратов, как показано на рисунке. Сторона маленького белого квадрата равна 1.*



Найти стороны большого прямоугольника.
Ответ: 32 и 33.
Решение. Пусть a и b – ширина и высота большого прямоугольника, которые мы ищем. Обозначим сторону квадрата с номером i через x_i. Известно, сто $x_9 = 1$. Некоторые квадраты хорошо примыкают друг другу, что позволит нам получить соответствующие уравнения.
Выпишем уравнения по горизонтальным стыкам

$$x_1 + 1 = x_4,$$
$$x_4 + x_6 = x_7,$$
$$x_5 + x_3 = x_6 + x_8,$$
$$x_2 = x_5 + 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = a,$$
$$x_7 + x_8 = a.$$

Выпишем уравнения по вертикальным стыкам

$$x_1 = x_2 + 1,$$
$$x_3 = x_2 + x_5,$$
$$x_4 + 1 = x_5 + x_6,$$
$$x_8 = x_6 + x_7,$$
$$x_1 + x_4 + x_7 = b,$$
$$x_3 + x_8 = b.$$

Объединив эти уравнения в одну систему, и решив её, получим $a = 32$, $b = 33$.

5. *В числе 17*04*20*18* каждую из четырёх звёздочек нужно заменить на любую из цифр так, чтобы полученное число делилось на 45. Сколькими различными способами это можно сделать?*
Ответ: 222.
Решение. Так как это число делится на 45, то оно делится на 5 и на 9. Это означает, что последняя цифра данного числа равна 0 или 5, а сумма цифр должна делиться на 9.

Обозначим цифры, которыми мы заменим первые три звёздочки, через x, y и z соответственно.

1) Пусть последняя цифра равна 0. Тогда данное число запишется в виде

$$17x04y20z180.$$

Сумма цифр этого числа равна

$$1+7+x+0+4+y+2+0+z+1+8+0=x+y+z+23$$
$$=18+(x+y+z+5).$$

Значит, величина $x+y+z+5$ должна делиться на 9.

Так как x, y, z – цифры, то

$$5 \leq x+y+z+5 \leq 32.$$

Следовательно, величина $x+y+z$ может принимать значения 4, 13 и 22.

A) Количество неотрицательных целых решений уравнения $x+y+z=4$ равно $C_{4+2}^{2}=C_{6}^{2}=15$. Все они подходят, так как не превосходят 4.

B) Найдём количество решений уравнения $x+y+z=13$, где x, y, z – цифры.

Количество неотрицательных целых этого уравнения равно $C_{13+2}^{2}=C_{15}^{2}=105$.

Исключим лишнее. Возможен вариант, когда одно из чисел x, y или z больше 9 (10 и более). Заметим, что случай, когда два или три из этих чисел больше 9 невозможен. Пусть для определённости $x>9$, то есть $x=10+a$ $(a \in \mathbb{Z},\ a \geq 0)$ Тогда получим уравнение

$$a+y+z=3.$$

Количество неотрицательных целых решений этого уравнения равно $C_{3+2}^{2}=C_{5}^{2}=10$. Случаи, когда $y>9, z>9$ рассматриваются аналогично.

Значит, количество лишних решений равно $3 \cdot 10=30$.

Таким образом, в этом случае общее количество способов равно $105-30=75$.

C) Найдём количество решений уравнения $x+y+z=22$, где x, y, z – цифры.

Количество неотрицательных целых этого уравнения равно $C_{22+2}^{2}=C_{24}^{2}=276$.

Исключим лишнее. Возможен вариант, когда одно из чисел x, y или z больше 9 (10 и более). Пусть для определённости $x>9$, то есть $x=10+a$ $(a \in \mathbb{Z},\ a \geq 0)$ Тогда получим уравнение

$$a+y+z=12.$$

Количество неотрицательных целых решений этого уравнения равно $C_{12+2}^{2}=C_{14}^{2}=91$. Случаи, когда $y>9, z>9$ рассматриваются аналогично.

Значит, количество решений, когда хотя бы одно из чисел больше 9, равно $3 \cdot 91=273$.

Теперь рассмотрим вариант, когда два из этих числа, например x и y, больше 9. Тогда $x=10+a, y=10+b$ $(a, b \in \mathbb{Z}, a, b \geq 0)$. Получим уравнение

$$a+b+z=2.$$

Количество неотрицательных решений последнего уравнения равно $C_{2+2}^{2}=C_{4}^{2}=6$. Аналогично рассматриваются варианты, когда $y>9, z>9$ или $x>9, z>9$. Всего вариантов, когда два из этих числа больше 9 равно $3 \cdot 6=18$. Вариант, когда все три этих числа больше 9, невозможен.

Значит лишних вариантов будет $273-18=255$.

Таким образом, в этом случае общее количество способов равно $276-255$=21.

2) Пусть последняя цифра равна 5. Тогда данное число запишется в виде

$$17x04y20z185.$$

Сумма цифр этого числа равна

$$1+7+x+0+4+y+2+0+z+1+8+5=x+y+z+28$$
$$=27+(x+y+z+1).$$

Значит, величина $x+y+z+1$ должна делиться на 9.

Так как x, y, z – цифры, то

$$1 \leq x + y + z + 1 \leq 28.$$

Следовательно, величина $x + y + z$ может принимать значения 8, 17 и 26.

А) Количество неотрицательных целых решений уравнения $x + y + z = 8$ равно $C_{8+2}^{2} = C_{10}^{2} = 45$. Все они подходят, так как не превосходят 8.

В) Найдём количество решений уравнения $x + y + z = 17$, где x, y, z – цифры.

Количество неотрицательных целых этого уравнения равно $C_{17+2}^{2} = C_{19}^{2} = 171$.

Исключим лишнее. Возможен вариант, когда одно из чисел x, y или z больше 9 (10 и более). Заметим, что случай, когда два или три из этих чисел больше 9 невозможен. Пусть для определённости $x > 9$, то есть $x = 10 + a$ ($a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$) Тогда получим уравнение

$$a + y + z = 7.$$

Количество неотрицательных целых решений этого уравнения равно $C_{7+2}^{2} = C_{9}^{2} = 36$. Случаи, когда $y > 9, z > 9$ рассматриваются аналогично.

Значит, количество лишних решений равно $3 \cdot 36 = 108$.

Таким образом, в этом случае общее количество способов равно $171 - 108 = 63$.

С) Найдём количество решений уравнения $x + y + z = 26$, где x, y, z – цифры.

Количество неотрицательных целых этого уравнения равно $C_{26+2}^{2} = C_{28}^{2} = 378$.

Исключим лишнее. Возможен вариант, когда одно из чисел x, y или z больше 9 (10 и более). Пусть для определённости $x > 9$, то есть $x = 10 + a$ ($a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$) Тогда получим уравнение

$$a + y + z = 16.$$

Количество неотрицательных целых решений этого уравнения равно $C_{16+2}^{2} = C_{18}^{2} = 153$. Случаи, когда $y > 9, z > 9$ рассматриваются аналогично.

Значит, количество решений, когда хотя бы одно из чисел больше 9, равно $3 \cdot 153 = 459$.

Теперь рассмотрим вариант, когда два из этих числа, например x и y, больше 9. Тогда $x = 10 + a, y = 10 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 0$). Получим уравнение

$$a + b + z = 6.$$

Количество неотрицательных решений последнего уравнения равно $C_{6+2}^{2} = C_{8}^{2} = 28$. Аналогично рассматриваются варианты, когда $y > 9, z > 9$ или $x > 9, z > 9$. Всего вариантов, когда два из этих числа больше 9 равно $3 \cdot 28 = 84$.

Вариант, когда все три этих числа больше 9, невозможен. Значит лишних вариантов будет $459 - 84 = 375$.

Таким образом, в этом случае общее количество способов равно $378 - 375 = 3$.

Итак, общее количество расставить цифры указанным способом равно $15 + 75 + 21 + 45 + 63 + 3 = \mathbf{222}$.

6. *Найдите все натуральные числа* x *и* y *такие, что*

$$3 \times \text{НОД}(x, y) + x = 2020,$$
$$\text{НОК}(x, y) + 2y = 2018.$$

(Здесь $\text{НОД}(x, y)$ *– наибольший общий делитель чисел* x *и* y, ,$\text{НОК}(x, y)$ *– наименьшее общее кратное чисел* x *и* y*).*

Ответ: $x = 2014$, $y = 2$.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(x, y)$, тогда $x = dm$, $y = dn$, где m, n – взаимно простые натуральные числа. Заметим, что в этом случае $\text{НОК}(x, y) = dmn$.

Имеем

$$3d + dm = 2020 \Leftrightarrow d(3 + m) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101;$$

$$dmn + 2dn = 2018 \Leftrightarrow dn(m + 2) = 2 \cdot 1009.$$

Из этих уравнений следует, что d является общим делителем чисел 2020 и 2018, то есть $d = 1$ или $d = 2$.

1) Если $d = 1$, то $3 + m = 2020$. Отсюда $m = 2017$. Подставим во второе уравнение, получим

$$2019n = 2018.$$

Так как n – натуральное, то последнее уравнение не имеет решений.

2) Если $d = 2$, то $3 + m = 1010$. Отсюда $m = 1007$. Подставив эти значения во второе уравнение, получим

$$2 \cdot n \cdot 1009 = 2018 \Leftrightarrow n = 1.$$

Итак, $x = 2 \cdot 1007 = 2014$, $y = 2 \cdot 1 = 2$.

7. *2018 волейбольных команд сыграли однокруговой турнир (каждая с каждой сыграла по одному разу), причем в каждом матче играли команды, имевшие к началу этого матча поровну очков. Сколько очков набрала команда-победительница? За победу в волейболе дают 1 очко, за поражение 0 очков, ничьих не бывает*

Ответ: 2017.

Решение.

Лемма. Если в какой-то момент одна из команд имеет ровно k очков, то в конце турнира у какой-нибудь из команд будет ровно k очков.

Доказательство леммы. После каждой встречи, в которой играют команды, имеющие ровно по k очков, одна из команд по-прежнему будет иметь ровно k очков. Поэтому всегда будет команда, имеющая k очков. Лемма доказана.

Расположим команды по возрастанию количества набранных очков.

1) Изначально все команды имели 0 очков. По лемме будет команда, которая наберёт 0 очков. Это первая команда.

2) Команды с 1-й по $(n - 1)$-й проиграли всем остальным командам, значит, остальные команды набрали не менее n очков. Значит, найдётся команда, набравшая ровно n очков. Ясно, что это будет именно $(n + 1)$-я команда, и она набрала эти очки, выиграв у команд с меньшими номерами.

Заметим, что тогда 2018-я команда набрала ровно 2017 очков.

8. *Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 10-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. Она знает, что если кинуть кокосовый орех с окна 4 этажа, то он не разобьётся. Какое минимальное количество бросков потребуется обезьяне, чтобы гарантированно удовлетворить свое любопытство, если у нее есть два ореха (орехи одинаковые по своим ударопрочным характеристикам)?*

Ответ: 3 броска.

Решение.

Заметим, что если бы у нас был только один кокосовый орех и непроверенными остались n этажей, то нам понадобится n бросков, чтобы гарантированно узнать, из окна какого самого низкого этажа нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. Бросать нужно, начиная с самого низкого этажа до самого верхнего, пока кокос не разобьётся.

Рассмотрим задачу, когда у нас 2 ореха.

1) Если бы в доме было только 5 этажей (то есть осталось проверить 1 этаж), то достаточно было бы 1 броска.

2) Если бы в доме было бы 6 этажей (то есть осталось проверить 2 этажа), то достаточно было бы 2 бросков.

3) Если бы в доме было бы 7 этажей, то осталось бы проверить 3 этажа.

A) Пусть первый орех брошен с 5 этажа. Если орех разбился, то вопрос решён. Если орех не разбился, то останется проверить ещё 2 этажа (6 и 7 этажи). На это понадобится ещё 2 попытки, то есть всего 3 попытки.

B) Пусть первый орех был брошен из окна 6 этажа. Если орех разбился, то нужно проверить ещё 5 этаж. Если не разбился, то 7 этаж. Всего 2 попытки.

C) Пусть первый орех был брошен из окна 7 этажа. Если он не разбился, то вопрос решён. Если разбился, то у нас имеется 1 орех и необходимо проверить 2 этажа: 5 и 6. На это нужно ещё 2 попытки. Всего 3 попытки.

Итак, если имеется 2 ореха и нужно проверить 3 этажа, то за 2 попытки можно ответить на поставленный вопрос.

4) Рассмотрим ситуацию, когда в доме 8 этажей, то есть нужно проверить 4 этажа.

A) Пусть первый орех брошен из окна 5 этажа. Если орех разбился, то вопрос решён. Если орех не разбился, то останется проверить ещё 3 этажа (6, 7 и 8). На это понадобится ещё 2 попытки (см. п. 3), то есть всего 3 попытки.

B) Пусть первый орех был брошен из окна 6 этажа. Если орех разбился, то нужно проверить ещё 5 этаж (1 попытка). Если не разбился, то 7 и 8 этажи (2 попытки). Итак, в самом худшем случае понадобится 3 попытки.

C) Пусть первый орех был брошен из окна 7 этажа. Если орех разбился, то нужно проверить 5 и 6 этажи (2 попытки). Если не разбился, то 8 этаж (1 попытка). Итак, в самом худшем случае понадобится 3 попытки.

D) Пусть первый орех был брошен из окна 8 этажа. Если орех не разбился, то вопрос решён. Если орех разбился, то у нас 2 целых ореха и нужно проверить 3 этажа (2 попытки, см. п. 3). В самом худшем случае понадобится 3 попытки.

Итак, если имеется 2 ореха и нужно проверить 4 этажа, то за 3 попытки можно ответить на поставленный вопрос.

5) Пусть теперь в доме 9 этажей. Нужно проверить 5 этажей.

Менее чем за три броска ответить на вопрос не удастся (для проверки 4 этажей необходимо 3 броска). 3 бросков достаточно:

- ✓ первый орех бросается из окна 6 этажа;
- ✓ если орех разбился, то нужно проверить ещё 5 этаж (1 бросок);
- ✓ если не разбился, то 7, 8, 9 этажи (2 броска, см. п.3);
- ✓ таким образом, в самом худшем случае понадобится 3 попытки.

Итак, если имеется 2 ореха и нужно проверить 5 этажей, то за 3 броска можно ответить на поставленный вопрос.

6) Пусть теперь в доме 10 этажей. Нужно проверить 6 этажей.

Меньше чем за три броска ответить на вопрос не удастся (для проверки 5 этажей необходимо 3 броска). 3 бросков достаточно:

- ✓ первый орех бросается с окна 7 этажа;
- ✓ если орех разбился, то остаётся проверить 5 и 6 этажи (2 броска);

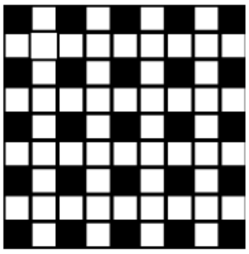
- ✓ если орех не разбился, то необходимо проверить 8, 9 и 10 этажи (2 броска);
- ✓ таким образом, в самом худшем случае понадобится 3 броска.

Итак, если имеется 2 ореха и нужно проверить 6 этажей, то за 3 броска можно ответить на поставленный вопрос.

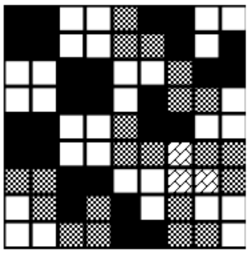
9. *Квадрат* 9×9 *разрезан на квадраты* 2×2 *и «уголки» из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов* 2×2 *могло при этом получиться?*

Ответ: 6.

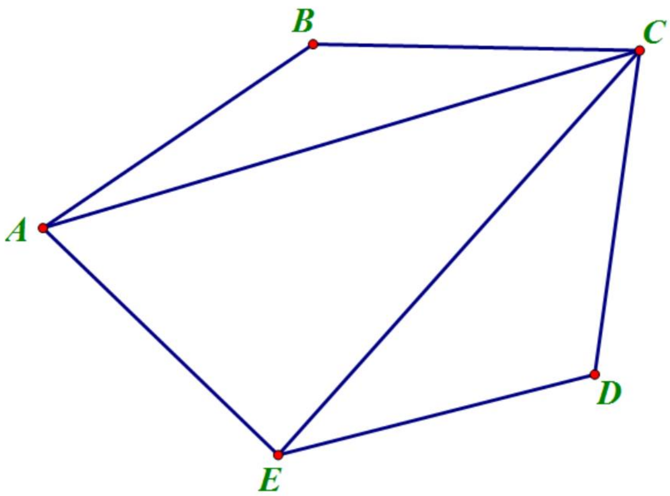
Решение. Отметим клеточки квадрата так, как показано на рисунке ниже.



Тогда в каждом квадратике 2×2 окажется ровно по одной закрашенной клеточке, а в каждом уголке – не более одной закрашенной клеточки. Значит, всего фигур получится не меньше 25. Пусть среди них k квадратиков и m уголков. Тогда $k + m \geq 25 - k$, и потому всего в этих фигурах $4k + 3m = k + 3(k + m) \geq 75 + k$ клеток. Но в квадрате 9×9 количество клеток равно 81. Поэтому $75 + k \leq 81$, т.е. $k \leq 6$. Пример, когда квадратов ровно 6, показан на втором рисунке.



10. *Все стороны выпуклого пятиугольника* $ABCDE$ *равны, а* $\angle BCD = 2\angle ACE$. *Найдите* $\angle ACE$.



Ответ: 30°.

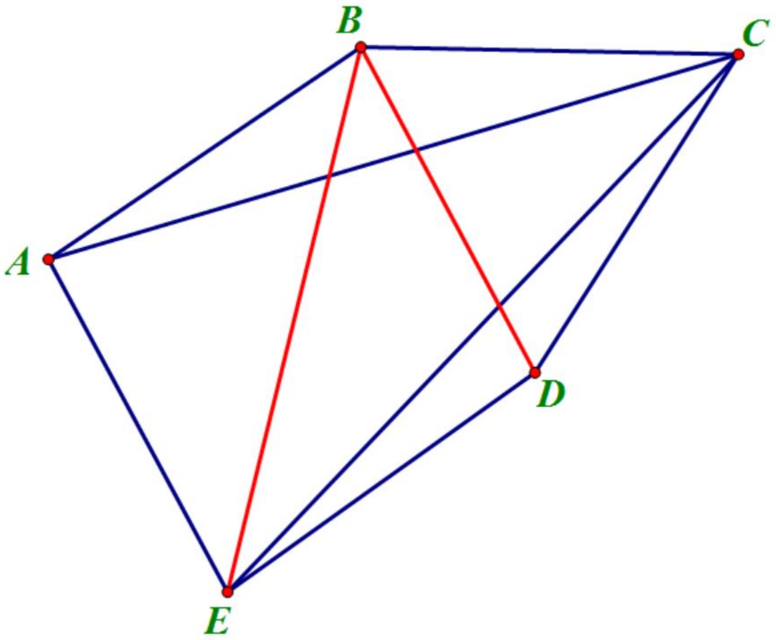
Решение. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Поэтому $\angle BAC = \angle BCA$. Аналогично, $\angle ECD = \angle CED$. Из треугольника ACE получаем

$$\angle ACE + \angle CAE + \angle CEA = 180°.$$

Но по условию $\angle ACE = \angle BCA + \angle CED$. Поэтому $\angle BCA + \angle CED + \angle CAE + \angle CEA = 180°$. Заметим, что

$$\angle BCA + \angle CAE = \angle BAE \text{ и } \angle CED + \angle CEA = \angle AED.$$

Поэтому $\angle BAE + \angle AED = 180°$, то есть AB || DE.



Так как по условию отрезки AB и DE еще и равны, то $\Delta ABE = \Delta DEB$. Поэтому $AE = DB$. Но по условию $BC = CD = AE$. Значит, треугольник BCD – равносторонний. Отсюда $\angle ACE = \frac{\angle BCD}{2} = 30°$.