Районная олимпиада по математике 2015–2016 учебный год

Условия задач

8 класс

Задача № 1. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: все цифры в десятичной записи числа $9n$ равны 1.

Задача № 2. Продавец в понедельник повысил цену на товар на $x\%$. Продажи упали и в среду он снизил цену на $y\%$, в результате чего она вернулась на прежний уровень. Найдите значение величины $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

Задача № 3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC равна 10, длина основания AD равна 3, $CD = 7$ и $\angle ADC = 140^\circ$. Найдите $\angle ABC$.

Задача № 4. Найдите все двузначные натуральные числа, равные сумме произведения своих цифр и их суммы. Примечание: таким числом является, например, $19 = 1 \cdot 9 + 1 + 9$.

Задача № 5. В треугольнике ABC угол $\angle A$ тупой и $AB = AC$. Точка M такова, что C — середина AM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Известно, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM — равносторонний треугольник.

Задача № 6. A и B играют в игру. Ход состоит в том, что соответствующий игрок называет натуральное число, меньшее 31, которое не равно ни одному из названных ранее чисел и не имеет общих делителей больше 1 ни с одним из названных ранее чисел. После этого ход переходит к другому игроку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает A. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

9 класс

Задача № 1. Средняя линия трапеции делит ее площадь в отношении $5 : 7$. Найдите отношение оснований трапеции.

Задача № 2. Два шахматиста сыграли между собой несколько партий. За победу, ничью и поражение игроку начисляется 4 балла, 2 балла и 1 балл, соответственно. В сумме игроки набрали 170 баллов. Мог ли победитель набрать ровно 90 баллов?

Задача № 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy - 2x = -5 \end{cases}$ в действительных числах.

Задача № 4. Докажите, что $a = \sqrt{9 - \sqrt{77}}\sqrt{2}\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(9 + \sqrt{77}\right)$ — целое число.

Задача № 5. Квадрат $ABIJ$ лежит внутри правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ со стороной 1. Найдите длину отрезка CJ.

Задача № 6. A и B играют в игру. Ход состоит в том, что соответствующий игрок называет натуральное число, меньшее 31, которое не равно ни одному из названных ранее чисел и не имеет общих делителей больше 1 ни с одним из названных ранее чисел. После этого ход переходит к другому игроку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает A. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

10 класс

Задача № 1. Решите уравнение $2\sqrt{x} + \sqrt{1 - 4x} = 1$ в действительных числах.

Задача № 2. Найдите все тройки натуральных чисел $(a,\ b,\ c)$, удовлетворяющие соотношениям $(a,\ 20) = b$, $(b,\ 15) = c$ и $(a,\ c) = 5$. Здесь $(k,\ l)$ обозначает наибольший общий делитель чисел k и l.

Задача № 3. На меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$ со стороной 1, выбрана точка M. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P, а отрезки DM и AC — в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $APQD$.

Задача № 4. Неотрицательные числа x, y удовлетворяют неравенству $x + y \leqslant 1$. Докажите, что $8xy \leqslant 5x(1 - x) + 5y(1 - y)$. Когда выполняется равенство?

Задача № 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABC, BCD, CDA и DAB равны. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Задача № 6. На доске записаны числа 11 и 13. За один ход можно дописать одно число, равное сумме каких-то двух уже записанных на доске различных чисел. Можно ли за несколько таких ходов получить число 2015?

11 класс

Задача № 1. Докажите, что для любых целых чисел a, b, c, d число
$$abcd\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)\left(a^2-d^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-d^2\right)\left(c^2-d^2\right)$$
кратно 7.

Задача № 2. В треугольнике ABC справедливы следующие соотношения: $AB = 5$, $BC = 10$ и $\angle ABC = 90^\circ$. $DEFG$ — квадрат, у которого вершины D и E лежат на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC, а вершина G лежит на окружности с центром в точке A, проходящей через точку B. Найдите площадь $DEFG$.

Задача № 3. Положительные числа x, y удовлетворяют соотношению $xy = 4$. Найдите наибольшее возможное значение выражения
$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+3}\,.$$

Задача № 4. Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 14$ в рациональных числах.

Задача № 5. На доске записаны числа 11 и 13. За один ход можно дописать одно число, равное сумме каких-то двух уже записанных на доске различных чисел. Можно ли за несколько таких ходов получить число 2015?

Задача № 6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а биссектрисы углов $\angle DAC$ и $\angle DBC$ пересекаются в точке T. Известно, что $\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TO}$. Найдите величины всех углов треугольника ABT.

Условия задач и решения задач

8 класс

Задача № 1. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: все цифры в десятичной записи числа $9n$ равны 1.

Ответ. $111\,111\,111/9 = 12345679$.

Решение. По признаку делимости на 9, число $9n$ состоит из $9k$ единиц, где k — натуральное число. Тогда минимальное значение $9n$ равно $111\,111\,111$.

Задача № 2. Продавец в понедельник повысил цену на товар на $x\%$. Продажи упали и в среду он снизил цену на $y\%$, в результате чего она вернулась на прежний уровень. Найдите значение величины $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

Ответ. $\frac{1}{100}$.

Решение. Заметим, что в начале цена увеличилась в $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ раз, а затем уменьшилась с коэффициентом $\left(1 - \frac{y}{100}\right)$, то есть

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1 \qquad (1)$$

Преобразовав уравнение (1), получим

$$1 + \frac{x}{100} - \frac{y}{100} + \frac{xy}{100^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{100}\left(x - y + \frac{xy}{100}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{100} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{100}\,.$$

Задача № 3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC равна 10, длина основания AD равна 3, $CD = 7$ и $\angle ADC = 140^\circ$. Найдите $\angle ABC$.

Ответ. 70°.

Решение. Отметим на отрезке BC точку E такую, что $BE = AD = 3$. Тогда $ABED$ — параллелограмм, и $EC = 10 - 3 = 7 = CD$. Следовательно, CDE — равнобедренный треугольник. Из этого равнобедренного треугольника найдем: $\angle BCD = 180^\circ - \angle ADC = 40^\circ$, $\angle ABC = \angle DEC = (180^\circ - \angle BCD)/2 = 70^\circ$.

Задача № 4. Найдите все двузначные натуральные числа, равные сумме произведения своих цифр и их суммы. Примечание: таким числом является, например, $19 = 1 \cdot 9 + 1 + 9$.

Ответ. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 9.

Решение. Пусть y искомое число, записываемое цифрами a и b, то есть $y = \overline{ab}$ ($a \neq 0$). Тогда

$$\overline{ab} = 10a + b = a \cdot b + a + b \quad \Leftrightarrow \quad 9a = a \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad b = 9.$$

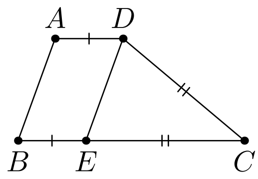

Рис. 1

Задача № 5. В треугольнике ABC угол $\angle A$ тупой и $AB = AC$. Точка M такова, что C — середина AM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Известно, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM — равносторонний треугольник.

Решение. Известно, что сумма двух внутренних углов треугольника равна внешнему углу третьего. Пусть $\angle CBA = \angle BCA = \angle MCD = \alpha$, где D — точка пересечения прямых BC и PM. Тогда $\angle CMD = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle APC = \angle MPC = \alpha$, так как прямая PC лежит на серединном перпендикуляре отрезка AM. Тогда из треугольника BPC найдем $\angle PCD = 2\alpha$, то есть $\angle PCM = 3\alpha = 90^\circ$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Получается, что в равнобедренном треугольнике APM $\angle APM = 2\alpha = 60^\circ$.

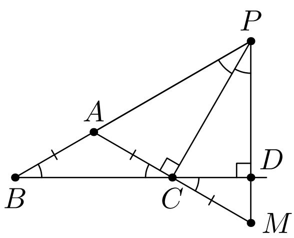

Рис. 2

Задача № 6. A и B играют в игру. Ход состоит в том, что соответствующий игрок называет натуральное число, меньшее 31, которое не равно ни одному из названных ранее чисел и не имеет общих делителей больше 1 ни с одним из названных ранее чисел. После этого ход переходит к другому игроку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает A. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Ответ. У игрока A.

Решение. Приведем стратегию игрока A, по которой он может выиграть. Первым своим ходом он называет число 30. Тогда B не может назвать четные числа, числа делящиеся на 3 и на 5. Поэтому B может назвать только одно число из множества $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Заметим, что все эти числа попарно взаимно просты. Поэтому игроки A и B будут выбирать числа только из этого множества, не препятствуя выбору других чисел из этого множества. Так как в этом множестве 8 чисел, то игрок A возьмет последнее число.

9 класс

Задача № 1. Средняя линия трапеции делит ее площадь в отношении $5 : 7$. Найдите отношение оснований трапеции.

Ответ. $1 : 2$.

Решение. Известно, что площадь трапеции равна произведению его высоты на среднюю линию. Пусть $2a$ и $2b$ — длины оснований. Тогда длина средней линии равна $a+b$. Средняя линия данной трапеции лежит на равном расстоянии от оснований, поэтому эта линия делит трапецию на две трапеции, у которых равные высоты. Тогда отношение их площадей равно $\frac{5}{7} = \frac{2a + (a + b)}{2b + (a + b)}$. Из пропорции найдем $b = 2a$, то есть одно основание в два раза больше другого.

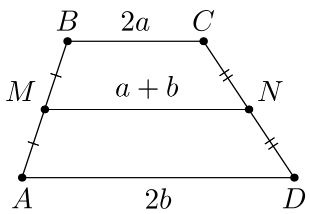

Рис. 3

Задача № 2. Два шахматиста сыграли между собой несколько партий. За победу, ничью и поражение игроку начисляется 4 балла, 2 балла и 1 балл, соответственно. В сумме игроки набрали 170 баллов. Мог ли победитель набрать ровно 90 баллов?

Ответ. Нет, не мог.

Решение. Пусть победитель выиграл a партий, сыграл в ничью b партий, и проиграл c партий. Тогда проигравший выиграл c партий, сыграл в ничью b партий, и проиграл a партий, причем он набрал 80 баллов. Составим систему, используя условие задачи: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 90, \\ 4c + 2b + a = 80. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе, получим $3a-$

$-\,3c = 10$. Но это уравнение не имеет решений в целых числах, так как левая часть этого уравнения делится на 3, а правая — нет.

Задача № 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy - 2x = -5 \end{cases}$ в действительных числах.

Ответ. Система не имеет решений.

Решение. Сложим уравнения системы, и преобразуем полученное уравнение, получим:

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 = 0.$$

Заметим, что последнее равенство возможно только при $x = 1$ и $y = -x = -1$. Но эти значения не удовлетворяют ни одному уравнению исходной системы.

Задача № 4. Докажите, что $a = \sqrt{9-\sqrt{77}}\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(9+\sqrt{77}\right)$ — целое число.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{9-\sqrt{77}}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18-2\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{11}-\sqrt{7}.$$

Тогда исходное выражение равно

$$a = \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2\left(9+\sqrt{77}\right) = \left(18-2\sqrt{77}\right)\left(9+\sqrt{77}\right) =$$
$$= 2\left(9-\sqrt{77}\right)\left(9+\sqrt{77}\right) = 2\,(81-77) = 8.$$

Задача № 5. Квадрат $ABIJ$ лежит внутри правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ со стороной 1. Найдите длину отрезка CJ.

Ответ. $CJ = \sqrt{3}$.

Решение. Так как восьмиугольник правильный, то каждый его угол равен $\dfrac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$. Так как $ABIJ$ — квадрат, то $\angle ABJ = 45^\circ$, $\angle CBJ = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. По теореме Пифагора $BJ = \sqrt{2}$, $CJ = \sqrt{BJ^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.

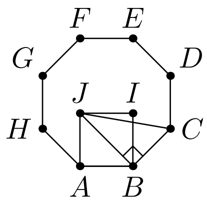

Рис. 4

Задача № 6. A и B играют в игру. Ход состоит в том, что соответствующий игрок называет натуральное число, меньшее 31, которое не равно ни одному из названных ранее чисел и не имеет общих делителей больше 1 ни с одним из названных ранее чисел. После этого ход переходит к другому игроку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает A. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

10 класс

Задача № 1. Решите уравнение $2\sqrt{x}+\sqrt{1-4x}=1$ в действительных числах.

Ответ. $x_1=0$, $x_2=1/4$.

Решение. Область допустимых значений переменной $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$4x+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-4x}+(1-4x)=1\Leftrightarrow 4\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-4x}=0.$$

Из последнего уравнения легко следует ответ.

Задача № 2. Найдите все тройки натуральных чисел $(a,\ b,\ c)$, удовлетворяющие соотношениям $(a,\ 20)=b$, $(b,\ 15)=c$ и $(a,\ c)=5$. Здесь $(k,\ l)$ обозначает наибольший общий делитель чисел k и l.

Ответ. Имеется три решения: $(a,b,c)=(5m,5,5)$, $(10n,10,5)$, $(20k,20,5)$, где m и n — любые нечетные натуральные, k — любое натуральное число.

Решение. Из третьего условия следует, что c кратно 5 (это числа 5, 10, 15, ...), а из второго — 15 кратно c. Следовательно, $c=5$ или 15.

Если $c=15$, то из второго условия следует, что b делится на 15 (это числа 15, 30, 45, ...). Но в то же время, из первого условия следует, что 20 делится на b, что невозможно. Поэтому единственное возможное значение c это 5.

Найдем теперь b. Из второго условия следует, что b делится на 5, тогда из первого — b равен одному из чисел 5, 10 или 20 (все они делят 20). Теперь нетрудно выписать все ответы:

если $b=5$, то $(a,b,c)=(5m,5,5)$;

если $b=10$, то $(a,b,c)=(10n,10,5)$;

если $b=20$, то $(a,b,c)=(20k,20,5)$;

где m и n — любые нечетные натуральные, k — любое натуральное число.

Задача № 3. На меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$ со стороной 1, выбрана точка M. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P, а отрезки DM и AC — в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $APQD$.

Ответ. 0,5.

Решение. Пусть отрезки AM и BC пересекаются в точке N, а отрезки PQ и ND — в точке K. Угол AMD опирается на дугу AD, поэтому он равен $45°$. А так как и $\angle QCN=45°$, то точки N, M, C, Q лежат на одной окружности. Следовательно $\angle MDB=\angle MCB=$ $=\angle MQN$, то есть $NQ\parallel BD$ или $PNQD$ — трапеция. У треугольников

PND и PQD есть общее основание, поэтому их площади равны. А так как в этих площадях есть также общая площадь треугольника PKD, то $S_{PNK} = S_{KDQ}$. Итак имеем:

$$S_{APQD} = S_{APKD} + S_{KDQ} = S_{APKD} + S_{PNK} = S_{AND} = 0{,}5.$$

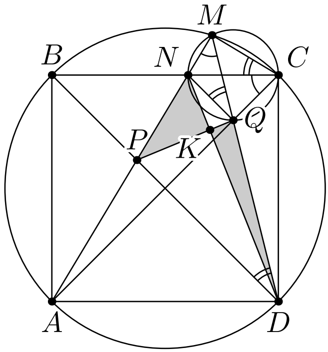

Рис. 5

Задача № 4. Неотрицательные числа x, y удовлетворяют неравенству $x + y \leqslant 1$. Докажите, что $8xy \leqslant 5x\,(1-x) + 5y\,(1-y)$. Когда выполняется равенство?

Ответ. Равенство достигается при $(x,\ y) = (0,\ 0)$, $(1,\ 0)$ или $(0,\ 1)$.

Решение. Из условия задачи следует неравенство $1 - x \geqslant y$. Умножив это неравенство на $5x$, получим $5x(1-x) \geqslant 5xy$. Аналогично, $5y(1-y) \geqslant 5xy$. Сложив два последних неравенства, получим

$$5x\,(1-x) + 5y\,(1-y) \geqslant 10xy. \qquad (1)$$

Но $10xy$ не меньше чем $8xy$.

Равенство выполняется при необходимом условии $8xy = 10xy$, то есть $xy = 0$. Но это выполняется, если одна из переменных x или y равна 0. Пусть $x = 0$. Тогда $5y(1-y) = 0$, то есть $y = 0$ или $y = 1$.

Задача № 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABC, BCD, CDA и DAB равны. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

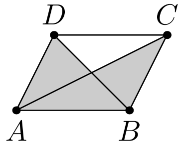

Рис. 6

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что противоположные стороны четырехугольника параллельны. Известно, что площадь треугольника равна половине произведения длины стороны треугольника на длину проведенной к этой стороне высоты. У треугольников ABC и DAB площади равны, и у них есть общая сторона AB. Поэтому расстояния от точек C и D до прямой AB равны. Следовательно, $CD \parallel AB$. Аналогично, можно показать, что $BC \parallel AD$.

Задача № 6. На доске записаны числа 11 и 13. За один ход можно дописать одно число, равное сумме каких-то двух уже записанных на доске различных чисел. Можно ли за несколько таких ходов получить число 2015?

Ответ. Да, можно.

Решение. Если каждый раз к первому числу последовательности прибавлять последнее, то в итоге получим число 2015, так как $2015 = 11 \cdot 182 + 13$. Первое число последовательности это 11, поэтому если каждый раз будем выписывать новые числа последовательности, то они будут состоять из чисел:

$$11 + 13, \quad 11 \cdot 2 + 13, \quad 11 \cdot 3 + 13, \quad \ldots, \quad 11 \cdot 182 + 13 = 2015.$$

11 класс

Задача № 1. Докажите, что для любых целых чисел a, b, c, d число

$$abcd\left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 - c^2\right)\left(a^2 - d^2\right)\left(b^2 - c^2\right)\left(b^2 - d^2\right)\left(c^2 - d^2\right)$$

кратно 7.

Решение. При решении будем пользоваться тем, что если два числа дают одинаковые остатки при делении на какое-то число, то разность этих чисел делится на это число.

Если среди данных чисел хотя бы одно число кратно 7, то произведение $abcd$ делится на 7. Если среди данных чисел нет кратных 7, но есть два, скажем числа a и b, дающие одинаковые остатки при делении на 7, то их разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ делится на 7. Пусть теперь ни одно из них не делится на 7, и все они дают разные остатки при делении на 7. Нетрудно понять, что квадрат целого числа может давать только остатки $0, 1, 2, 4$. Поэтому среди квадратов a^2, b^2, c^2, d^2 какие-то два дают одинаковые остатки, так как квадратов четыре, а остатков у нас три, это 1, 2, 3 (остаток 0 мы не берем).

Задача № 2. В треугольнике ABC справедливы следующие соотношения: $AB = 5$, $BC = 10$ и $\angle ABC = 90°$. $DEFG$ — квадрат, у которого вершины D и E лежат на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC, а вершина G лежит на окружности с центром в точке A, проходящей через точку B. Найдите площадь $DEFG$.

Ответ. 4.

Решение. Пусть прямая FG пересекает сторону AB в точке H. Сторона $AB = 5$ в два раза меньше стороны $BC = 10$. Треугольник CEF подобен треугольнику BCA. Поэтому если $BH = EF = a$, то $EC = 2a$, $DE = a$, $BD = HG = 10 - 3a$, $AH = 5 - a$ и $AG = AB = 5$. Применив теорему Пифагора для треугольника AGH, поучим уравнение $(5 - a)^2 + (10 - 3a)^2 = 25$. Решая квадратное уравнение, получим корни $a_1 = 2$, $a_2 = 5$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как $5 = AB > EF = a$. Следовательно, сторона квадрата $DEFG$ равна 2, а его площадь — 4.

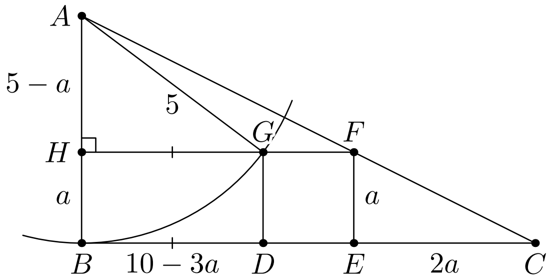

Рис. 7

Задача № 3. Положительные числа x, y удовлетворяют соотношению $xy = 4$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3}.$$

Ответ. 2/5.

Решение. При $x = y = 2$, данное выражение равно 2/5. Докажем, что это выражение не больше 2/5.

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leqslant \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5\,(x + y + 6) \leqslant 2\,(x+3)\,(y+3)$$

$$5\,(x + y + 6) \leqslant 2\,(xy + 3x + 3y + 9) \Leftrightarrow 4 \leqslant x + y.$$

Из неравенства $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ следует неравенство $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ или $x + y \geqslant 4$, так как $xy = 4$.

Задача № 4. Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 14$ в рациональных числах.

Ответ. $r_1 = -4$, $r_2 = 4$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$. Следовательно, если $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r = x$, то $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = \frac{1}{x}$, где $x \neq 0$. Получим уравнение: $x + \frac{1}{x} = 14 \Rightarrow x^2 - 14x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 + 4\sqrt{3}$, $x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Заметим также, что

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^4 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3},$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^4 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3},$$

то есть $r_1 = -4$, $r_2 = 4$.

Задача № 5. На доске записаны числа 11 и 13. За один ход можно дописать одно число, равное сумме каких-то двух уже записанных на доске различных чисел. Можно ли за несколько таких ходов получить число 2015?

Задача № 6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а биссектрисы углов $\angle DAC$ и $\angle DBC$ пересекаются в точке T. Известно, что $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO}$. Найдите величины всех углов треугольника ABT.

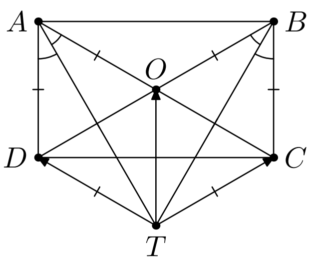

Рис. 8

Ответ. Все углы треугольника ABT равны 60°.

Решение. Равенство $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO}$ как раз удовлетворяет правилу параллелограмма. Получается, что $DOCT$ — параллелограмм и точка T лежит снаружи параллелограмма. $\angle DTA = \angle TAC$. Но так как по условию $\angle TAC = \angle TAD$, то $DA = DT$. Аналогично, $BC = CT$. Но так как $AD = BC$, получим $DO = TC = BC = AD = DT = OC$. Как видим, половины диагоналей параллелограмма $ABCD$ равны, то есть $ABCD$ — прямоугольник, причем углы треугольников DAC и DBC равны 60°. Тогда $\angle TAB = \angle TAC + \angle CAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, и аналогично, $\angle TBA = 60^\circ$.