Четырнадцатая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Шестнадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 15 апреля 2018 года

Решения задач

10–11 класс

1. (*Д. Мухин*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели биссектрисы AK и BN, на которые опустили перпендикуляры CD и CE из вершины прямого угла. Докажите, что длина отрезка DE равна радиусу вписанной окружности.

Решение. *Первый способ.* Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — ее радиус. Заметим, что $\angle EID = \angle AIB = 135^\circ$, а $CI = r\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата со стороной r). Так как CI — диаметр окружности, описанной около треугольника EID, то по следствию из теоремы синусов $DE = r\sqrt{2}\sin\angle EID = r$.

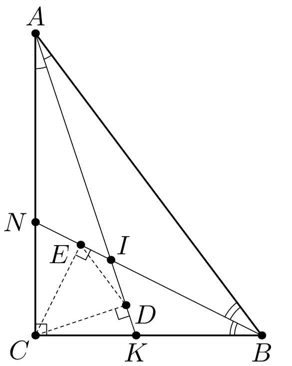

Рис. 10–11.1а

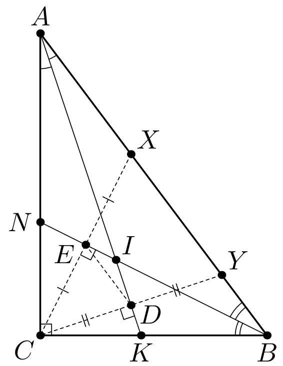

Рис. 10–11.1б

Второй способ. Пусть прямые CE и CD пересекают AB в точках X и Y соответственно. Тогда треугольник CBX — равнобедренный и $CE = XE$. Аналогично, $CD = YD$. Следовательно, DE — средняя линия треугольника XCY, то есть $DE = 0{,}5XY$.

В свою очередь, $XY = BX+AY-AB = BC+AC-AB = 2r$, откуда и следует утверждение задачи.

Комментарий. Точка I — центр описанной окружности треугольника XCY.

2. (*A. Mudgal, India*) Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB, точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD. Докажите, что $\angle CMN = 90^\circ$.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABD (см. рис.10–11.2а, б). Заметим, что $OM \perp MB$, а $ON \perp BC$. Тогда нам достаточно доказать подобие треугольников MON и MBC, откуда и будет следовать перпендикулярность их третьих сторон.

Это можно сделать различными способами.

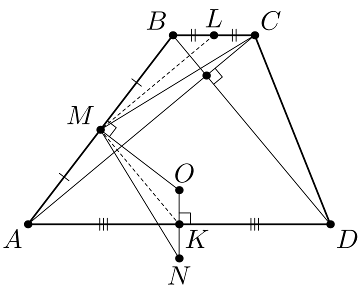

Рис. 10–11.2а

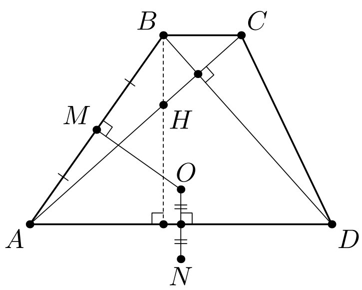

Рис. 10–11.2б

Первый способ. Пусть K и L — середины отрезков AD и BC соответственно (см. рис. 10–11.2а). Тогда $ML \parallel AC$ и $MK \parallel BD$, то есть $\angle KML = 90^\circ$. Следовательно, в треугольниках MOK и MBL соответствующие стороны перпендикулярны, то есть эти треугольники подобны и треугольник MBL является образом треугольника MOK при поворотной гомотетии с центром M, углом 90° и коэффициентом, равным отношению соответствующих сторон. Поскольку K — середина ON и L — середина BC, то при этом преобразовании точка N переходит в точку C, что и требовалось.

Второй способ. Заметим, что $\angle MON = \angle MBC$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Тогда достаточно доказать, что $OM : MB = ON : BC$.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABD (см. рис. 10–11.2б). Используем следующий факт:

Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра его описанной окружности до середины противолежащей стороны.

В нашем случае, $ON = BH$, то есть $ON : BC = BH : BC = \operatorname{tg}\angle BCH$. Учитывая, что $OM : MB = \operatorname{ctg}\angle BOM = \operatorname{ctg}\angle BDA = \operatorname{ctg}\angle DBC = \operatorname{tg}\angle BCH$, получим требуемое.

3. (*П. Кожевников*) Фиксированы окружность, точка A на ней и точка K вне окружности. Секущая, проходящая через K, пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что ортоцентры треугольников APQ лежат на фиксированной окружности.

Решение. Пусть M — середина отрезка PQ, H — ортоцентр треугольника, O — центр описанной окружности (см. рис. 10–11.3). Тогда $\angle OMK = 90^\circ$, то есть точка M лежит на окружности с диаметром OK.

Далее используем следующий факт:

Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника и диаметрально противоположны противолежащим вершинам.

В нашем случае: точка H_1, симметричная H относительно точки M, лежит на описанной окружности треугольника и диаметрально противоположна вершине A треугольника APQ. Следовательно, точка H_1 — фиксирована. Заметим, что при гомотетии с центром H_1 и коэффициентом 2 точка H является образом точки M. Поскольку точка M лежит на фиксированной окружности, то и точка H также лежит на фиксированной окружности.

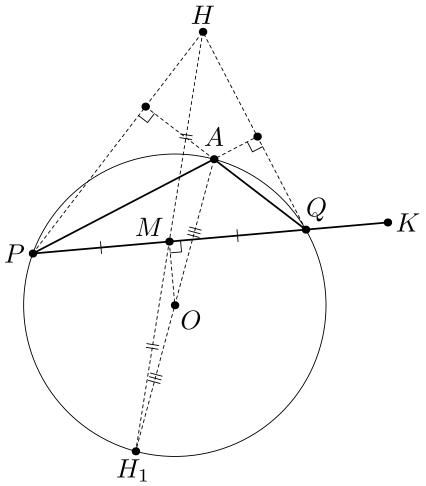

Рис. 10–11.3

Комментарий. Решение можно было завершить и по-другому. Так как точка M движется по окружности, то и точка пересечения медиан G треугольника ABC — тоже. Гомотетия с фиксированным центром O и коэффициентом 3 переводит G в H, так что и H движется по окружности.

4. (*М. Кунгожин, А. Заславский*) На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M. В треугольнике ACM точка I_1 — центр вписанной, J_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны CM. В треугольнике BCM точка I_2 — центр вписанной, J_2 центр вневписанной окружности, касающейся стороны CM. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков I_1I_2 и J_1J_2 перпендикулярна AB.

Решение. Пусть P, R, S и Q — основания перпендикуляров, проведенных из точек I_1, I_2, J_1 и J_2 к прямой AB (см. рис. 10–11.4).

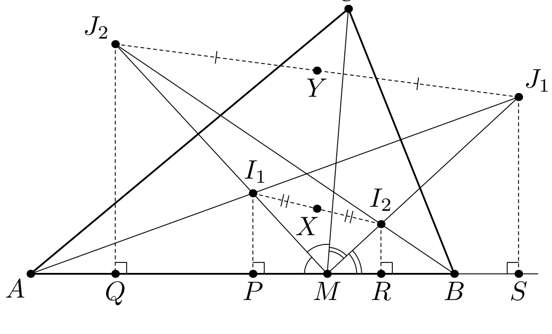

Рис. 10–11.4

Докажем, что $PQ = RS$. Используя, что $MP = p_{ACM} - AC$, а $BQ = p_{BCM}$, получим: $PQ = MQ - MP = (BQ - BM) - (p_{ACM} - AC) = (p_{BCM} - BM) - (p_{ACM} - AC) = 0{,}5(BC + CM - BM - AM - CM + AC) = 0{,}5(BC + AC - AB)$.

Аналогичные вычисления можно проделать и для отрезка RS.

Пусть X и Y — середины отрезков I_1I_2 и J_1J_2 соответственно. Докажем, что $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Заметим, что $\overrightarrow{XY} = 0{,}5(\overrightarrow{I_1J_2} + \overrightarrow{I_2J_1})$. Кроме того, $PQ = -I_1J_2 \cos\angle(\overrightarrow{I_1J_2}; \overrightarrow{AB})$, а $RS = I_2J_1 \cos\angle(\overrightarrow{I_2J_1}; \overrightarrow{AB})$. Следовательно, $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{AB} = 0{,}5(\overrightarrow{I_1J_2} + \overrightarrow{I_2J_1}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot |\overrightarrow{AB}|(-PQ + RS) = 0$, что и требовалось.

Комментарии.

1) Вместо использования скалярного произведения векторов можно было воспользоваться тем, что при проекции на AB середины отрезков I_1I_2 и J_1J_2 попадают в совпадающие середины отрезков PR и QS.

2) Верен следующий факт (И. Ф. Шарыгин): Пусть L — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB. Тогда точки I_1, I_2, M и L лежат на одной окружности.

Доказав аналогичный факт для точек J_1 и J_2, и учитывая, что точки X и Y — центры этих окружностей, то есть лежат на серединном перпендикуляре к ML, можно получить другое решение задачи.

3) Еще один факт, эквивалентный задаче И. Ф. Шарыгина и связанный с даной задачей: $LP = MR$. Его можно доказать, используя отрезки касательных.

4) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда прямая XY является прямой Гаусса для четырехугольника II_1MI_2 и проходит через середину IM. Теперь, используя задачу И. Ф. Шарыгина или факт из комментария 3, можно получить еще одно решение данной задачи. Про прямую Гаусса см., например, В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии», глава 4.

5. (*Ф. Нилов*) На поверхности равногранного тетраэдра сидят два муравья. Докажите, что они могут встретиться, преодолев в сумме расстояние, не превосходящее диаметра окружности, описанной около грани тетраэдра.

Решение. Заметим, что грани равногранного тетраэдра — равные остроугольные треугольники, причем сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°. Тогда этими треугольниками можно замостить плоскость (см. рис. 10–11.5). Нетрудно заметить (раскрасив треугольники решётки в 4 цвета), что если поставить наш тетраэдр одной из граней на треугольник решётки, то при перекатывании через рёбра он всегда будет вставать на треугольник решётки; более того, на один треугольник решётки будет всегда вставать одна и та же грань тетраэдра.

Тогда, поставив две точки на этой плоскости и соединив их линией, мы получим путь, соединяющий эти точки на поверхности тетраэдра (возможно, проходящий по одной и той же грани несколько раз).

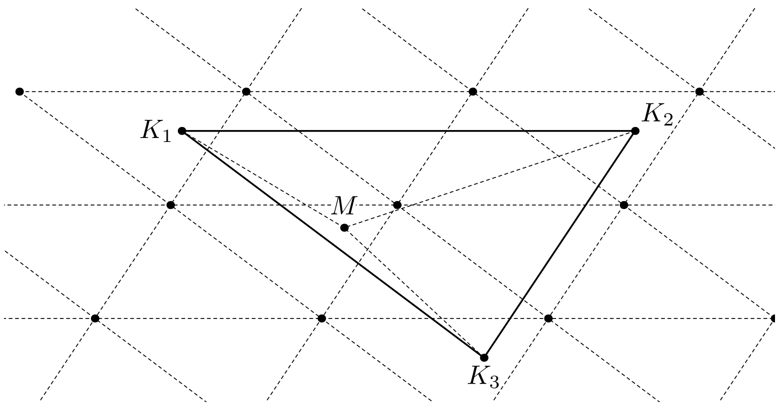

Рис. 10–11.5

Отметим точку K, в которой сидит первый муравей и эквивалентные ей точки, получающиеся из K параллельным переносом на удвоенные векторы сторон треугольника. Получим треугольную решетку из треугольников, подобных с коэффициентом 2 треугольникам граней. Рассмотрим точку M, в которой сидит второй муравей. Пусть она попала внутрь или на границу треугольника $K_1K_2K_3$. Тогда одно из расстояний MK_1, MK_2 или MK_3 до вершин не превосходит радиуса окружности, описанной около треугольника $K_1K_2K_3$, то есть диаметра описанной окружности грани. Действительно, точка O — центр описанной окружности треугольника $K_1K_2K_3$ — лежит внутри этого треугольника. Точка M попадает в один из равнобедренных треугольников OK_1K_2, OK_1K_3, OK_2K_3, тогда расстояние до одной из вершин не превосходит длины боковой стороны этого треугольника.

Комментарий. Отметим, что равенство достигается, если, например, одного муравья поместить в вершину тетраэдра, а другого — в ортоцентр противоположной грани. Действительно, сделав развертку тетраэдра, получим, что кратчайший путь равен диаметру описанной окружности грани.

6. (*А. Соколов*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках A_1 и A_2. Пусть ω_A — окружность, описанная около треугольника AA_1A_2. Аналогично определяются ω_B и ω_C. Докажите, что эти три окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что любые две из окружностей ω_A, ω_B и ω_C пересекаются на окружности ω, описанной около треугольника ABC.

Используем следующий факт:

(*И. Ф.Шарыгин*, XXVI *Международная математическая олимпиада*) *Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O, проходящая через вершины B и C, и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно* (*см. рис.* 10–11.6*а*). *Описанные окружности треугольников APQ и ACB имеют ровно две общие точки A и M. Тогда угол OMA — прямой.*

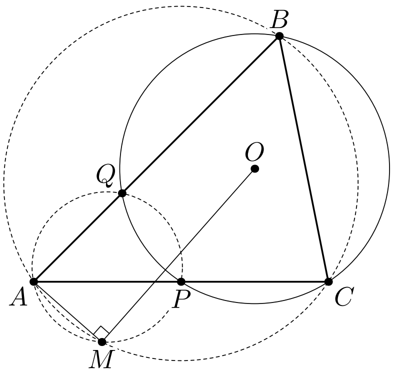

Рис. 10–11.6а

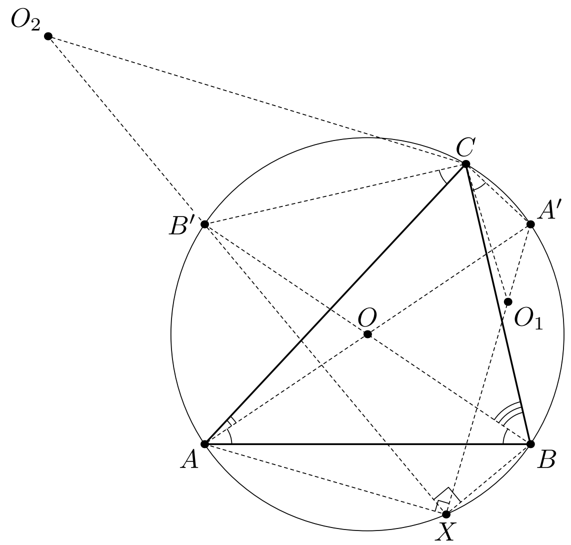

Рис. 10–11.6б

В наших обозначениях: O_1 — центр окружности, описанной около треугольника BOC, окружность ω_A пересекает окружность ω в точках A и X. Тогда угол O_1XA — прямой.

Вернемся к задаче. Пусть O_2 — центр окружности, описанной около треугольника AOC (см. рис. 10–11.6б). Тогда достаточно доказать, что окружность ω_B проходит через точку X, то есть угол O_2XB — прямой.

Пусть A' и B' — точки на окружности ω, диаметрально противоположные точкам A и B соответственно. Тогда O_1, A' и X лежат на одной прямой и достаточно доказать, что O_2, B' и X лежат на одной прямой.

Заметим, что $\angle CA'X+\angle CB'X = 180^\circ$, то есть достаточно доказать равенство углов $CA'O_1$ и $CB'O_2$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать подобие треугольников $CA'O_1$ и $CB'O_2$.

Сначала докажем, что $\angle O_2CB' = \angle O_1CA'$.

Пусть $\angle CAA' = x$, $\angle CBB' = y$, $\angle OAB = \angle OBA = \angle B'CA = \angle BCA' = z$. Используя, что O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников BOC и AOC соответственно, получим: $\angle O_2CB' = \angle O_2CA-z = 2z+2y-90^\circ-z = z+2y-90^\circ$, а $\angle O_1CA' = z-(2z+2x-90^\circ) = 90^\circ-2x-z$. Учитывая, что $2x+2y+2z = 180^\circ$, получим требуемое.

Теперь докажем, что $\dfrac{CA'}{CB'} = \dfrac{CO_1}{CO_2}$.

Так как AA' и BB' — диаметры, то $\dfrac{CA'}{CB'} = \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\sin(90^\circ-\angle B)}{\sin(90^\circ-\angle A)} = \dfrac{\cos\angle B}{\cos\angle A}$.

Кроме того, по следствию из теоремы синусов для треугольников AOC и BOC: $CO_1 = \dfrac{BC}{2\sin 2\angle A}$, $CO_2 = \dfrac{AC}{2\sin 2\angle B}$. Используя, что $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sin\angle A}{\sin\angle B}$ и формулу синуса двойного угла, получим требуемое.

Следовательно, треугольники $CA'O_1$ и $CB'O_2$ подобны, откуда следует, что O_2, B' и X лежат на одной прямой, то есть окружность ω_B проходит через точку X.

Комментарий. Решение задачи И. Ф. Шарыгина можно найти в статье «О двух велосипедистах и вишневой косточке», http://geometry.ru/articles/protasovbycicle.pdf или в брошюре «Вписанные углы» серии Школьные Математические Кружки, занятие 9.

Второй способ. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает прямые BC и AC в точках A' и B'; точки H и H' — ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C$; P — точка пересечения AB и $A'B'$; Q — проекция C на HH'. Тогда $\angle ACP = \angle QCB$.*

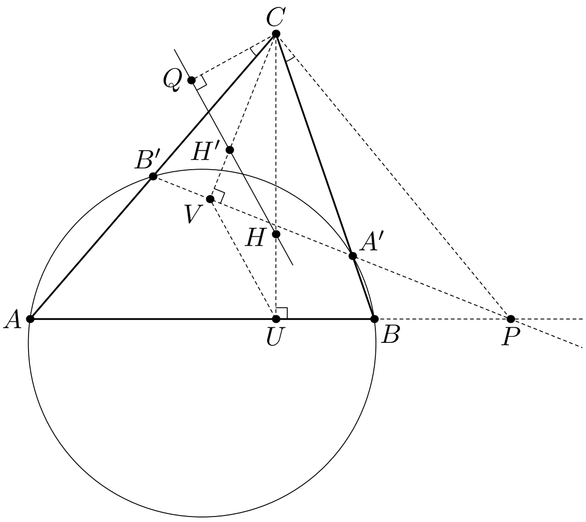

Рис. 10–11.6в

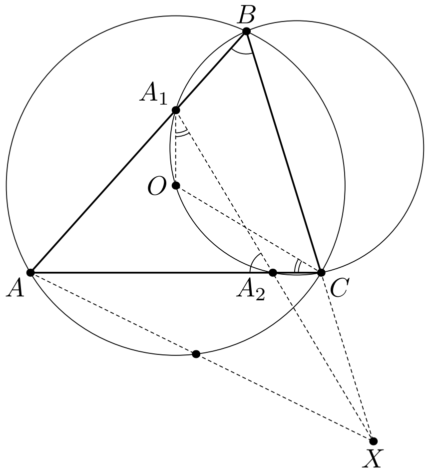

Рис. 10–11.6г

Доказательство. Пусть CU и CV — высоты подобных треугольников ABC и $A'B'C$, точки H и H' — их ортоцентры (см. рис. 10–11.6в). Заметим, что $HH' \parallel UV$. Учитывая, что точки U и V лежат на окружности с диаметром CP, получим: $\angle PCU = \angle PVU = \angle VCQ$, то есть прямые CP и CQ симметричны относительно биссектрисы угла UCV, которая, в силу подобия треугольников ABC и $A'B'C$, совпадает с биссектрисой угла ACB.

Вернемся к задаче. Пусть прямые A_1A_2 и BC пересекаются в точке X (см. рис. 10–11.6г). Поскольку BC — общая хорда окружностей ABC и OBC, а A_1A_2 — общая хорда окружностей AA_1A_2 и OBC, то AX — радикальная ось окружностей ABC и AA_1A_2. Из равенства вписанных углов (см. рис. 10–11.6г) получим, что $\angle OA_1A_2 + \angle A_1A_2A = 90^\circ$, следовательно, O — ортоцентр треугольника AA_1A_2. По лемме получаем, что прямая, симметричная AX относительно биссектрисы угла A, перпендикулярна прямой OH, где H — ортоцентр треугольника ABC. Следовательно, точка пересечения окружностей ω_A и ABC изогонально сопряжена бесконечной точке прямой, перпендикулярной прямой Эйлера (то есть прямая Эйлера является прямой Штейнера этой точки). Аналогично получаем, что окружности ω_B и ω_C пересекают описанную окружность треугольника в той же точке.

Комментарий. Доказать лемму можно заметив, что соответствие между прямыми CP и CQ проективно, то есть утверждение леммы достаточно проверить для трех положений точки P. Для P, совпадающей с A, B и основанием биссектрисы угла C, утверждение очевидно.

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, И. Богданов, А. Горская, А. Заславский, Ф. Нилов.